Petre Năchilă

Cătălin-Eugen Năchilă

Exerciții şi probleme pentru cercurile de matematică

Clasa a VI-a

Ediția a IV-a revizuită şi adăugită

Editura Nomina

Cuprins

ALGEBRĂ

Capitolul I
NUMERE NATURALE. DIVIZIBILITATE

1. Determinați două numere naturale a căror sumă este 733, iar suma răsturnatelor celor două numere este 337.

2. Determinați numărul perechilor de numere naturale $\overline{ab2}$ şi $\overline{xy3}$ a căror sumă este egală cu suma răsturnatelor lor.

3. Scrieți ca sumă de două pătrate de două numere naturale următoarele numere:
a) 10^2; b) 10^3; c) 10^{2n}; d) 10^{2n+1}, $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Scrieți ca sumă de două pătrate de două numere naturale următoarele numere:
a) 25^2; b) 25^3; c) 25^{2n}; d) 25^{2n+1}, $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Determinați numărul cifrelor de 9 care apar în scrierea zecimală a următoarelor numere:
a) $3 \cdot (10^{30} - 1)$; b) $4 \cdot (10^{50} - 3)$; c) $5 \cdot (10^n - 1)$; d) $8 \cdot (10^n - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Determinați pătratele perfecte de forma:
a) $2^6 + 2^7 + 2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$; b) $2^m + 2^{m+1} + 2^n$, $m \in \mathbb{N}^*$ fixat, $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Determinați $n \in \mathbb{N}$ ştiind că: $100 < 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} < 400$.

8. Fie a, b, $c \in \mathbb{N}$ astfel încât $2a + 3b + 4c = 29$; $5a + 4b + 3c = 34$. Determinați $(a + 5b + 9c)(c - a)$.

9. Determinați numerele naturale n, ştiind că împărţind pe n la 19 se obţine câtul egal cu restul împărţirii lui n la 13, iar împărţind pe n la 13 se obţine câtul egal cu restul împărţirii lui n la 19.

10. Determinați numărul $\overline{abc}$, ştiind că $\overline{abbc} = \overline{abb} + \overline{ab} + a + 1773$.

11. Determinați numărul natural n de 5 cifre pentru care $\overline{6n} = 4 \cdot \overline{n6}$.

12. Determinați numerele $\overline{xy}$ ştiind că $\overline{xy} + \overline{yx} = k^2, k \in \mathbb{N}$.

13. Determinați sumele cifrelor numerelor:
a) $10^{20} + 10^{10} - 5$; b) $10^{2n} + 10^n - 5$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

14. Există numere naturale de 3 cifre mai mici de 3 ori decât răsturnatele lor?

15. Scrieți următoarele numere ca produs de două numere consecutive:
a) 111222; b) 1111122222; c) $\underbrace{111...1}_{n}\underbrace{222...2}_{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

16. Determinați ultima cifră a numărului $a = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{4n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

17. Demonstrați că există numere naturale nenule m, n şi numere naturale de două cifre $\overline{ab}$ pentru care $\overline{mab} \cdot \overline{nab} = \overline{pab}$, unde $p \in \mathbb{N}^*$.

18. Determinați numerele $\overline{xy}$ (de două cifre) în cazurile:
a) $x + y = x^2$; b) $x + y = x^3$; c) $x + y = x^4$;
d) $x + y = y^2$; e) $x + y = y^3$; f) $x + y = y^4$.

19. Determinați numărul $\overline{xy}$ ştiind că $\left(\overline{xy}\right)^3$ este un număr de 4 cifre scris doar cu cifrele 1 şi 3.

20. a) Determinați numerele:
$a = 8^{30} - 7 \cdot 8^{29} - 7 \cdot 8^{28} - \ldots - 7 \cdot 8 - 1$; $b = 9^{100} - 8 \cdot 9^{99} - 8 \cdot 9^{98} - \ldots - 8 \cdot 9 - 1$.
b) Generalizare.

21. Determinați trei numere naturale consecutive având produsul de forma $\overline{abacc}$.

22. Determinați numerele $\overline{abc}$ pentru care avem $a^{b+c} + a^b + a^c = 819$.

23. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Ştiind că numerele n şi 5n au împreună un număr par de cifre, demonstrați că n conţine cifra 1.

24. Aceeaşi problemă dacă cifra 5 este înlocuită cu una din cifrele 6, 7, 8 sau 9.

25. Fie a cifra nenulă şi fie $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Determinați numărul $S(n) = \overline{a} + \overline{aa} + \overline{aaa} + \ldots \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{n\ cifre}$.
b) Determinați suma cifrelor numărului $S(n)$ pentru $n \leq 3$.

26. Determinați restul împărţirii numărului $n \in \mathbb{N}^*$ la 5 ştiind că $2n + 1$ şi $3n + 1$ sunt pătrate diferite.

27. Demonstrați că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul $a = 2^n + 4^k$ să fie pătrat perfect.

28. Fie a, b, c, $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $3^a + 3^b + 3^c = 13 \cdot 3^n$. Determinați numărul $A = (a + b - 2c)(a + c - 2b)(b + c - 2a)$.

29. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați cifrele a şi b ştiind că numerele A şi B sunt pătrate perfecte, unde: $A = \underbrace{11\ldots1}_{2n} - \underbrace{aa\ldots a}_{n}$; $B = \underbrace{44\ldots4}_{2n} - \underbrace{bb\ldots b}_{n}$.

30. Determinați numărul perechilor (m, n) de numere naturale pentru care $13 < 2^m + 2^n \leq 49$.

31. Determinați al câtelea termen al şirului 5, 10, 15, 25, …, are suma cifrelor egală cu 36.

32. Determinați cel mai mare număr natural cu proprietatea că oricare două cifre vecine ale sale (luate în ordinea scrierii numărului de la stânga la dreapta) formează un număr divizibil cu 17.

33. Aceeaşi problemă dacă înlocuim 17 cu 13.

34. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați două numere naturale ştiind că împărţind unul din ele la celălalt se obţine restul $n + 1$.

Capitolul III
RAPOARTE ŞI PROPORŢII

1. Determinaţi numerele $\overline{abc}$, ştiind că $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ca}$ sunt direct proporţionale cu trei numere naturale consecutive.

2. Determinaţi a, b, $c \in \mathbb{N}^*$ direct proporţionale cu numerele 2^n, 2^{n+1}, 2^{n+2}, $n \in \mathbb{N}$, ştiind că $a + b + c \leq 200$.

3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\dfrac{2a_1}{a_2} = \dfrac{3a_2}{2a_3} = \ldots = \dfrac{na_{n-1}}{(n-1)a_n} = \dfrac{a_n}{na_1}$.

Demonstraţi că $\dfrac{n(n+1)}{2} \,\Big|\, (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.

4. Suma a 2008 numere naturale direct proporţionale cu numerele $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{2007}$ este egală cu $2^{2010} - 4$. Determinaţi numerele.

5. Numerele x, y, $x + y + z$ sunt direct proporţionale cu numerele $a + 1$, $a + 2$, $3(a + 1)$, $a \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţi că $3 < \left(\dfrac{x}{z}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{z}\right)^2 + \left(\dfrac{x+y}{y+z}\right)^2 \leq 14{,}25$.

6. Fie două mulţimi A, B cu $A \cap B \neq \varnothing$., ştiind că card$(A \cap B) = p\% \cdot$ card $A = q\% \cdot$ card B, determinaţi raportul procentual dintre card$(B - A)$ şi card$(A - B)$,

7. Determinaţi $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, ştiind că $\dfrac{a}{a+3} = \dfrac{b^2}{b+6} = \dfrac{c^3}{c+14}$.

8. Determinaţi numerele a, b, $c \in \mathbb{N}^*$ invers proporţionale cu 2, 4, 6, ştiind că $abc \leq 288$.

9. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ şi $k \in \mathbb{Q}$, astfel încât $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{3} = \dfrac{c}{4} = k$.

a) Demonstraţi că avem $k \in \mathbb{N}^*$.
b) Determinaţi a, b, c, ştiind că $a^2 + 2b^2 + 3c^2 \leq 280$.

10. Fie $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\dfrac{x}{9} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{x}$. Demonstraţi că numărul $z + 4xy$ este pătrat perfect.

11. Numerele x, y, z sunt direct proporţionale cu numerele prime p, $p + 2$, $p + 4$, iar $x^2 + y^2 + z^2 = 8300$. Determinaţi x, y, z.

12. Determinaţi numerele naturale a, b, c, ştiind că $\dfrac{2a+3b}{53} = \dfrac{3b+4c}{81} = \dfrac{4c+2a}{68}$ şi $a \cdot b \cdot c = 1320$.

13. Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}_+^*$, astfel încât $\dfrac{a}{c+1}=\dfrac{b}{c+3}=\dfrac{c}{2}$.

a) Demonstrați că dacă două dintre numere sunt naturale, atunci şi al treilea număr este natural

b) Determinați $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, ştiind că $a^2 + b^2 + c^2 \leq 38$.

14. Fie numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}_+^*$ cu proprietatea:

$$\frac{a_1}{2a_2}=\frac{2a_2}{3a_3}=\frac{3a_3}{4a_4}=\ldots=\frac{(n-1)a_{n-1}}{na_n}=\frac{na_n}{a_1},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 3.$$

a) Determinați numerele $a_2, a_3, \ldots, a_n$ în funcţie de a_1.

b) Determinați două numere raţionale a_1 pentru care media aritmetică a numerelor $\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \ldots, \dfrac{1}{a_n}$ este număr natural.

15. Numerele naturale x, y, z sunt direct proporţionale cu numerele naturale a, b, c. Determinați x, y, z, ştiind că $abc - a^2c = 3$ şi că $56 \leq x + y + z \leq 72$.

16. Fie $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\dfrac{x+y}{yz}=\dfrac{y+z}{zx}=\dfrac{z+x}{xy}$. Determinați:

a) $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$;

b) $\dfrac{xy^2z^3+x^2y^3z+x^3yz^3}{x^6+y^6+z^6}$.

17. Numerele naturale x, y, z sunt direct proporţionale cu numerele prime n, $n + 1$, $n + 3$. Determinați $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$, ştiind că $xy + yz + zx \leq 31$.

18. Fie x, y, z cifre nenule, astfel încât $\dfrac{\overline{xyz}}{x}=\dfrac{\overline{yzx}}{y}=\dfrac{\overline{zxy}}{z}$. Determinați $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}$, dacă $\dfrac{1}{12} \leq \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx} \leq \dfrac{1}{3}$.

19. Determinați numerele raţionale x, y, z, numărul natural par k şi numărul natural n pentru care $x + y + z = 12$, $\dfrac{xk+1}{x+k}=\dfrac{yk+2}{y+k+1}=\dfrac{zk+3}{z+k+2}=n$.

20. Determinați numerele naturale x şi y, ştiind că $\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{y^2+3}{y+7}$.

21. Numerele raţionale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$sunt invers proporţionale cu numerele $1, 2, 3, \ldots, 100$. Determinați x, ştiind că $100 \cdot a_{100} = x\left(\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\ldots+\dfrac{a_{100}}{101}\right)$.

22. Determinați numerele x, y, z invers proporţionale cu numerele 3, 4, 6, ştiind că $\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{6}{z}=\dfrac{61}{24}$.

Capitolul V
PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Determinați numărul a format de ultimele trei cifre ale numărului $A = 1001^4 + 1002^4 + 3003^4 + 1004^4 + 1005^4 + 1$ şi demonstrați că A nu este pătrat perfect.

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați x şi y, ştiind că: $x \cdot \underbrace{xxx....x}_{n} = \underbrace{yyy....y}_{n}$.

3. Fie a, b, c, d cifre. Demonstrați că:

a) $a + c = b \Rightarrow 11 \mid \overline{abc}$; b) $11 \mid (a + c - b) \Rightarrow 11 \mid \overline{abc}$;

c) $11 \mid \overline{abc} \Rightarrow 11 \mid (a + c - b)$; d) $11 \mid (a + c - b - d) \Rightarrow 11 \mid \overline{abcd}$;

e) $11 \mid \overline{abcd} \Rightarrow 11 \mid (a + c - b - d)$.

4. Pentru orice număr natural $n \geq 2$ notăm cu: $D'(n) = \{m \in \mathbb{N}^* \mid m \mid n, m < n\}$. Un număr $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, se numeşte număr perfect dacă suma tuturor elementelor lui $D(n)$ este egală cu n. Decideţi care dintre numerele 2, 4, 6, 10, 12, 20, 28 sunt perfecte.

5. Rezolvați ecuaţiile $2^n(2^{n+1} - 1) = a$, unde $a \in A = \{2, 4, 6, 10, 12, 20, 28)$.

6. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Este adevărată afirmaţia: „Există $m \in \mathbb{N}$, astfel încât $n = 2^m \cdot (2^{m+1} - 1) \Rightarrow n$ este număr perfect”?

7. Fie $D'(n) = \{m \in \mathbb{N}^* \mid m \mid n, m < n\}$. Fie $S(n)$ suma tuturor elementelor din $D'(n)$. Două numere a şi b se numesc prietene dacă $S(a) = S(b)$. Stabiliți dacă următoarele numere sunt prietene:

a) 220 şi 284; b) 2620 şi 2924; c) 1050 şi 2000.

8. Fie m, n, p numere prime. Rezolvați în numere naturale ecuaţiile:

a) $n^3 + n^2 + n + 1 = 2^m$; b) $n^3 + n^2 + n + l = 4^m$; c) $n^m + l = p$.

9. Precizați dacă există numere prime care reprezintă suma pătratelor a trei numere consecutive.

10. Scrieți numărul $A = \underbrace{111....1}_{n}\underbrace{222....2}_{n}$ ca un produs de două numere naturale consecutive, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

11. Ştiind că p, $2p + l$ şi $5p + l$ sunt numere prime cu $p > 3$, demonstrați că numărul $a = 4p + 1$ este număr compus.

12. Determinați $m, n \in \mathbb{N}^*$, ştiind că: $(m, n) + [m, n] + 5 = 2(m + n)$.

13. Determinați restul împărţirii pătratului unui număr prim $p > 3$ la 12.

14. Determinați numerele prime m şi n, ştiind că $\dfrac{mn}{2(m+n)-mn} \in \mathbb{N}$.

15. Determinați $A \cap B$ în cazurile:

a) $A = \{3n - 25 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{25 - 6n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

b) $A = \{5n + 6 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{106 - 3n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

16. Determinați numerele $\overline{xyz}$ cu proprietatea $\overline{xyz} \mid \overline{zyx}$.

17. Determinați numărul numerelor de forma: $\overline{xyxy....xy}$ de $2n$ cifre divizibile cu 45, $n \in \mathbb{N}^*$.

18. Demonstrați că numărul $\underbrace{444....4}_{n}\underbrace{222....2}_{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, este produsul a două numere consecutive.

19. Determinați cel mai mare şi cel mai mic număr de 2000 de cifre, care conţine 1900 cifre de 1.

20. Determinați numărul: $A = 1000 + 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{9999....9}_{999 \text{ cifre}}$.

21. Determinați numerele prime p pentru care numărul $24p + 1$ este pătrat perfect.

22. Demonstrați că numărul $\underbrace{22....2}_{n}\underbrace{33....3}_{n-1}\underbrace{11....1}_{n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, are un divizor de $2n$ cifre.

23. Demonstrați că numerele de forma $\underbrace{aa....a}_{n}$ nu sunt pătrate perfecte, unde $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

24. Rezolvați în numere naturale ecuaţiile:

a) $abc = ab + c$;

b) $a + b + c + abc = ab + bc + ca + 2$;

c) $\dfrac{1}{2a} + \dfrac{1}{3b} = \dfrac{1}{4}$;

d) $\dfrac{3}{a} - \dfrac{2}{b} = 1$.

25. Calculați sumele:

a) $S_n = \dfrac{1}{2\cdot 5} + \dfrac{1}{3\cdot 6} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(n-2)(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

b) $S_n = \dfrac{1}{2\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 8} + \dfrac{1}{8\cdot 11} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$, $n \in \mathbb{N}$.

26. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, avem:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$ (identitatea Botez-Catalan).

27. Demonstrați inegalităţile:

a) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{15}{16} < \dfrac{1}{4}$;

b) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{99}{100} < \dfrac{1}{10}$;

c) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{399}{400} < \dfrac{1}{20}$;

d) Generalizare.

28. Demonstrați inegalităţile:

a) $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{10^2} < 2$;

b) $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{100^2} < 2$;

Capitolul I
DREAPTA

1. Fie punctele distincte A, B, C, D, E. Determinați numărul dreptelor distincte determinate de aceste puncte.

2. Se consideră n puncte distincte, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Determinați numărul minim și numărul maxim de drepte distincte determinate de aceste puncte, știind că nu toate sunt coliniare.

3. Fie A, B, C puncte distincte coliniare. Arătați că:

$(AB + BC - AC) \cdot (AB + AC - BC) \cdot (AC + BC - AB) = 0$.

4. Fie A, B, C, D puncte coliniare în această ordine. Demonstrați că:

a) $AC + BD = AD + BC$; b) $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$.

5. Fie punctele A, B, C, D, astfel încât $C, D \in (AB)$ și $AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Demonstrați că $D = C$.

6. Fie punctele A, B, C, D coliniare, în această ordine. Demonstrați că $AC + BD = 2 \cdot MN$, unde M și N sunt mijloacele segmentelor (AB) și (CD).

7. Fie punctele A, B, C, D coliniare. Stabiliți ordinea punctelor A, B, C, D pe dreapta $d = AB$ dacă $AB = a$, $AC = b$, $BD = c$, $BC = a + b$, $CD = a + b - c$.

8. Fie punctele A, B, C, D coliniare în această ordine. Demonstrați că:

$$\frac{AD}{AB} + \frac{BC}{CD} = BD \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} \right).$$

9. Fie punctele distincte A, B, C pe dreapta d. Fie M mijlocul segmentului (AB). Determinați lungimea segmentului (CM) dacă $AC = a$, $BC = b$.

10. Fie punctele coliniare distincte A, B, C și fie M, N, P mijloacele segmentelor (AB), (BC), respectiv (AC). Demonstrați că segmentele (MN) și (BP) au același mijloc.

11. Fie A, B, C, D puncte coliniare distincte în această ordine. Fie M, N, P, R mijloacele segmentelor (AB), (BC), (CD), (DA). Demonstrați că segmentele (MP) și (NR) au același mijloc.

12. Fie punctele coliniare distincte O, A, B, C în această ordine, Fie M, N, P mijloacele segmentelor (BC), (CA), respectiv (AB). Aflați valoarea raportului $\dfrac{OM + ON + OP}{OA + OB + OC}$.

13. Fie punctele $C, D \in (AB)$, $C \neq D$, astfel încât $AC \cdot AD = BC \cdot BD$. Calculați $\dfrac{AC}{BD} + \dfrac{AD}{BC}$.

14. Fie punctele M, $N \in (AB)$, astfel încât $\dfrac{AM}{AB} = m, \dfrac{AN}{AB} = n.$ În ce condiţii (MN) şi (AB) au acelaşi mijloc?

15. Fie punctele M, $N \in (AB)$, astfel încât $\dfrac{AM}{AB} = m, \dfrac{AN}{AB} = n.$ Determinați în ce condiţii are loc fiecare din relaţiile următoare:
a) $AM^2 + AN^2 = BM^2 + BN^2$; b) $AM^2 + BM^2 = AN^2 + BN^2$.

16. Fie punctele coliniare distincte $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{100}$, în această ordine, astfel încât $A_1A_2 = 1, A_2A_3 = 3, A_3A_4 = 5, \ldots, A_{99}A_{100} = 197$.
a) Determinați lungimile segmentelor (A_1A_{100}), (A_iA_j), unde $1 \le i < j \le 100$
b) Fie $M_{i,j}$ mijlocul segmentului (A_iA_j), $1 \le i < j \le 99$.
Determinați numărul perechilor (i, j) pentru care $A_1M_{i,j} = 36$.

17. Fie segmentul (OA) de lungime 2000 cm. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 4$ şi fie punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$, care sunt mijloacele segmentelor (OA), (AA_1), (AA_2), …, respectiv (AA_{n-1}). Determinați:
a) lungimile segmentelor (A_4A_5) şi (A_6A_{16}).
b) cel mai mic număr natural n pentru care $(AA_n) < 2$.

18. Fie punctele coliniare distincte A, B, C, D, E în această ordine. Punctul M este mijlocul segmentelor (BC) şi (AD). Punctul N este mijlocul segmentelor (CD) şi (BE). Punctele P şi R sunt mijloacele segmentelor (MN), respectiv (BD).
a) În ce condiţii avem $P \in (MC)$, respectiv $P = C$, respectiv $P \in (NC)$?
b) Determinați condiţia în care $\dfrac{AD}{BE} \in \mathbb{N}^*$.
c) Determinați poziţia punctului R.

19. Fie punctele A, B, C, D coliniare în această ordine. Se ştie că $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{m}{n}$, $\dfrac{CD}{BD} = \dfrac{m}{p}$, $m < n$, $m < p$.
a) Demonstrați că avem $p = n$ dacă $AC = BD$, $AB = CD$.
b) Demonstraţi că există o infinitate de triplete de numere naturale (m, n, p), astfel încât $AC = 2 \cdot CD$.

20. Fie punctele coliniare distincte O, A, B, C, D, astfel încât $OA = OB = n$ (cm), $AD = BC = m$ (cm), $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m < n$. Determinați perechile (m, n) pentru care $CD < 20$ cm.

21. Se consideră segmentul (AB) având lungimea de 120 cm. Prin punctele N_i se împarte segmentul (AB) în n segmente congruente de lungime 6 cm. Prin punctele P_j se împarte segmentul (AB) în p segmente congruente de lungime 8 cm.
a) Determinați n şi p, considerând şi punctele A şi B.
b) Determinați numărul perechilor (i, j) pentru care avem $N_i = P_j$.

Capitolul IV
PERPENDICULARITATE

1. Fie triunghiul ABC cu $AB = AC$, $m(\sphericalangle BAC) > 90°$. Fie O punctul de intersecţie ale mediatoarelor laturilor (AB) şi (AC). Aceste mediatoare intersectează latura (BC) în punctele E şi F, astfel încât $E \in MO$, $F \in NO$, unde $M \in (AB)$, $N \in (AC)$. Demonstrați că:
a) $AE = AF$; b) $\sphericalangle OAE \equiv \sphericalangle OAF$ şi $BF = CE$.

2. Rezolvați problema 1) modificând în enunţ doar:
i) $m(\sphericalangle BAC) < 90°$; ii) $m(\sphericalangle BAC) = 90°$.

3. Fie M, N, P mijloacele laturilor (AB), (AC), respectiv (BC) ale triunghiului isoscel ABC $(AB = AC)$. Fie $D, E \in (BC)$, astfel încât $(BD) \equiv (DE) \equiv (CE)$. Demonstrați că:
a) $DP = PE$; b) $MP = PN$;
c) $MD = NE$; d) $m(\sphericalangle AMD) + m(CNE) = 180°$.

4. Fie M, N, P mijloacele laturilor (AB), (AC), respectiv (BC) ale triunghiului isoscel ABC $(AB = AC)$. Fie punctele D şi E pe dreapta BC, astfel încât $B \in (DC)$, $C \in (EB)$, $DP = EP$. Demonstrați că:
a) $DC = EB$; b) $MP = PN$;
c) $MD = NE$; d) $DN = ME$.

5. Fie $\triangle ABC$ cu $AB < AC$. Fie punctele $D \in (AC)$, $E \in (AB$, astfel încât $AD = AB$, $AE = AC$. Fie P şi N mijloacele segmentelor (BC), respectiv (DE), iar $BC \cap DE = \{M\}$. Demonstrați că:
a) $MB = MD$, $ME = MC$; b) $AN = AP$; c) $\sphericalangle NAM \equiv \sphericalangle PAM$.

6. Fie M mijlocul laturii (BC) a triunghiului echilateral ABC, Fie punctul $N \in (AM)$, astfel încât $m(\sphericalangle MBN) = 15°$. Demonstrați că $AM + MN = AC$. (Se admite cunoscută afirmaţia: suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este de 180°.)

7. Fie triunghiurile dreptunghice ABC şi DBC, congruente, unde $AB < AC$, $AD \cap BC = \{O\}$. Fie $AE \perp BC$, $DF \perp BC$. Demonstrați că:
a) $BE =$ CF, $BF = CE$; b) $AF = DE$; c) $AO = DO$, $BO = CO$.

8. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC < BC = a$ (cm). Fie $(BD$ bisectoarea unghiului ABC cu $D \in (AC)$. Perpendiculara din C pe BD intersectează AB în E.
a) Demonstrați că $CD = DE$.
b) Determinați perimetrul triunghiului ADE.

9. Fie triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$. Perpendicularele în B pe BC şi în A pe AC se taie în punctul D. Perpendicularele în C pe BC şi în A pe AB se taie în punctul E. Demonstrați că:
a) $AE = AD$, $BD = CE$; b) $BE = CD$.

10. Fie triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$). Fie punctele $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ şi $BF \cap CE = \{D\}$, ştiind că $BE = CF$, demonstraţi că $AD \perp BC$.

11. Fie $\triangle ABC$ isoscel ($AB = AC$). Se duc perpendicularele în B şi C pe AB şi AC, care se intersectează în punctul D, iar E şi F sunt în exteriorul unghiului $\sphericalangle BAC$, astfel încât $BE = CF$. Fie $BF \cap CE = \{N\}$. Demonstraţi că:
a) $BF = CE$; b) $NB = NC$, $DB = DC$; c) A, N, D sunt coliniare.

12. Fie $\triangle ABC$ cu unghiurile $\sphericalangle ABC$ şi $\sphericalangle ACB$ ascuţite. Fie E şi $F \in BC$, astfel încât $B \in$ $\in (EC)$, $C \in (BF)$, $BE = BA$, $CF = CA$. Perpendicularele în B pe AE şi în C pe AF se intersectează în punctul D. Demonstraţi că $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$.

13. Fie $\triangle ABC$ isoscel ($AB = AC$) şi fie punctele $D \in (AB)$, $E \in (AC)$, astfel încât $AE = AD$. Fie punctele N, $M \in (BC)$, astfel încât $BN = CM$, $N \in (BM)$. Fie $\{P\} =$ $= DN \cap EM$. Demonstraţi că:
a) $DP = EP$; b) $PB = PC$; c) $PA \perp BC$.

14. Fie $\triangle ABC$ isoscel ($AB = AC$) şi fie punctele $D \in (AB)$, $E \in (AC)$, astfel încât $AE = AD$. Fie punctele N, $M \in (BC)$, astfel încât $BN = CM$, $N \in (BM)$.
Fie $DM \cap NE = \{R\}$. Demonstraţi că:
a) $\triangle DNM \equiv \triangle EMN$; b) $AR \perp BC$.

15. Fie triunghiul ABC cu $AB \perp AC$, $AB < AC$. Fie $D \in (AB$, astfel încât $BD = AC$. Fie $ED \perp AB$, E în interiorul unghiului $\sphericalangle BAC$, astfel încât $DE = AB$. Demonstraţi că:
a) $\sphericalangle BCE \equiv \sphericalangle BEC$; b) B se află pe mediatoarea segmentului (CE).

16. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic în A şi fie punctele D, E, F, $E \in (BC$, astfel încât $(BA$, $(AB$, $(AC$, $(CA$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle DBE$, $\sphericalangle DAE$, $\sphericalangle EAF$, respectiv $\sphericalangle ECF$. Demonstraţi că:
a) punctele D, A, F sunt coliniare;
b) $AB \perp DE$;
c) $DB + FC$ nu depinde de poziţia punctului $E \in (BC)$;
d) determinaţi poziţia punctului E pentru care $DB = FC$.

17. Fie $\triangle ABC$ echilateral şi fie punctele D şi E, astfel încât $C \in (AD) \cap (BE)$ şi $BD = DE$.
a) Demonstraţi că $AD = CE$.
b) Determinaţi poziţia unui punct $M \in (CE$, astfel încât $\triangle BDM \equiv \triangle EDC$.

18. Fie $\triangle ABC$ şi $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, $AD = BC$. Înălţimile din B şi C intersectează perpendicularele duse prin C şi B pe BC în punctele F, respectiv E. Demonstraţi că:
a) $DE \perp DF$;
b) $(DA$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle EDF$.

PROBLEME-GRILĂ PENTRU CONCURSURI

ALGEBRĂ

1. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se notează cu $P(n)$ produsul divizorilor naturali ai numărului n. Dacă $P(n) = 14^{792}$, atunci n este:
a) 14^9; b) 14^{14}; c) 7^{24}; d) 14^{11}.

2. Suma cifrelor numărului $\overline{ab}$ pentru care $\overline{ab} = (a-b)(\overline{ba}-15)$ este:
a) 10; b) 7; c) 9; d) 8.

3. Fie suma $S_a = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2(a+2)} + \frac{1}{3(a+3)} + ... + \frac{1}{n(a+n)}$, $a, n \in \mathbb{N}^*$, $a \le 2$, $n \ge 2$.
Dacă $S_1 = 0,(9)$, atunci $a + n$ este:
a) 19; b) 10; c) 12; d) 99.

4. Fie șirul $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 15$, $a_3 = 255$, … . Dacă n este numărul minim pentru care din cel puțin primele 10 numere de forma $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ obținem numere prime, atunci n este:
a) 1; b) 2; c) 4; d) 3.

5. Fie șirul $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 15$, $a_3 = 255$, … . Dacă $a_{n+1} = a \cdot a_n^2 + b \cdot a_n - c$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, atunci $a + b + c$ este:
a) 3; b) 4; c) 5; d) 6.

6. Dacă $(2^m, 2^n, 2^p)$, cu $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, este soluție a ecuației $x^2 + y^4 = z^3$, atunci $\min(m + n + p)$ este:
a) 10; b) 9; c) 8; d) 18.

7. Numărul de soluții ale ecuației $x^2 + y^4 = z^5$ în numere naturale este:
a) 1; b) 2; c) 3; d) infinit.

8. Numărul numerelor prime de 3 cifre având toate cifrele numere prime este:
a) 1; b) 3; c) 6; d) 9.

9. Fie $A = \left\{\overline{abcd} \,\middle|\, 5 \cdot \overline{ab} = 4 \cdot \overline{cd}\right\}$.
I) Cardinalul mulțimii A este:
a) 20; b) 18; c) 17; d) 16.
II) C.m.m.d.c. al numerelor din A este:
a) 9; b) 81; c) 15; d) 405.
III) Suma elementelor din A este:
a) 75330; b) 76140; c) 76545; d) 75735.

10. Numărul perechilor de numere naturale nenule (a, b) pentru care $\frac{a(a+1)}{2} = \frac{b+19}{b+1}$ este:
a) 1; b) 3; c) 2; d) 0.

11. Numărul perechilor de numere prime (p, q) pentru care $p = a^2 + b^2$, $q = a + b + 1$, unde $a, b \in \mathbb{N}$, este:
a) 3; b) 0; c) 1; d) 2.

12. Numărul numerelor prime p pentru care $p + 2$, $p^2 + 4$, $p^3 + 2$ și $p^4 - 2$ sunt simultan numere prime este:
a) 3; b) 1; c) 2; d) 4.

13. Numărul perechilor de numere naturale nenule (a, b), cu $a \leq 10$, $b \leq 20$, pentru care $(a, b) + [a, b] \leq a + b$ este:
a) 40; b) 50; c) 63; d) 100.

14. Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}$ și $2^a \cdot (2^b + 3)(2^c - 9) = 2024$, atunci $a + b + c$ este:
a) 10; b) 11; c) 12; d) 9.

15. Mulțimea $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \left| \dfrac{19^n + 21^n - 2^{2n} + 2^{n+4}}{34} \in \mathbb{N} \right. \right\}$ este:
a) $\mathbb{N}^*$; b) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$; c) $\mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$; d) $\varnothing$.

16. Fie numerele prime p și $2^p - 1$ și fie $n = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$. Suma $S(n)$ a divizorilor lui n este:
a) $2n$; b) $2^{2p} + 1$; c) $2^{2p} - 1$; d) 4^p.

17. Cardinalul mulțimii $A = \left\{ \overline{abc} \,\middle|\, a^2 + b^2 = c^2 \right\}$ este:
a) 2; b) 9; c) 11; d) 6.

18. Fie șirul definit prin $a_1 = 3$, $a_2 = 2a_1 + 3$, $a_3 = 2a_2 + 3^2$, $a_4 = 2a_3 + 3^3$ etc. Fie $A_n =$ $= 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + 2$. Numărul divizorilor naturali ai numărului A_{10} este:
a) 40; b) 24; c) 60; d) 36.

19. Numărul perechilor (n, m) formate din numere naturale pentru care $1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot$ $\cdot 2 \cdot 3 + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = m^2$ este:
a) 1; b) 2; c) 3; d) 4.

20. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și suma $S_n = \dfrac{1}{1 \cdot 11} + \dfrac{1}{11 \cdot 22} + \dfrac{1}{22 \cdot 33} + \ldots + \dfrac{1}{11n \cdot 11(n+1)}$. Cel mai mic număr natural n pentru care $11S_n - 1 \geq 0{,}09$ este:
a) 77; b) 88; c) 100; d) 99.

21. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \neq n$, și numerele $A = (m+1)\left(\dfrac{m}{2}+1\right)\left(\dfrac{m}{3}+1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\dfrac{m}{n}+1\right)$ și $B =$ $= (n+1)\left(\dfrac{n}{2}+1\right)\left(\dfrac{n}{3}+1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\dfrac{n}{m}+1\right)$. Atunci:
a) $A > B$, dacă $m > n$; b) $A > B$, dacă $m < n$;
c) $A \neq B$, pentru orice m, n; d) $A = B$.

22. Toate numerele $A(p) = (p - 1)(p + 1)$, unde p este număr prim, sunt divizibile cu:
a) 18; b) 20; c) 16; d) 24.

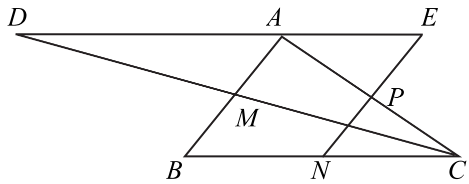


Fig. 42

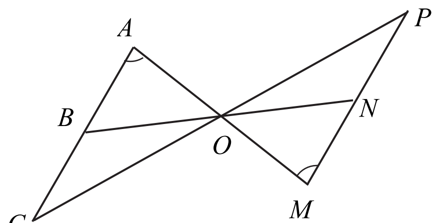


Fig. 42 bis

15. Fie M, N, P simetricele punctelor A, B, C faţă de punctul O (Fig. 42 bis). Avem $O \in AM$, $OA = OM$ şi analoagele. Din $\triangle OAB \equiv \triangle OMN$ (LUL) $\Rightarrow \sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle OMP$. Cum $\sphericalangle OAB \equiv \equiv \sphericalangle OAC$ avem $\sphericalangle OMN \equiv \sphericalangle OMP$ şi deci M, N, P sunt coliniare.

Capitolul IV. PERPENDICULARITATE

1. a) Dacă $AB = AC$, din $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$ (LUL) rezultă că $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ (Fig. 43). Avem $BM = AM = AN = = NC$ şi atunci $\triangle BME \equiv \triangle CNF$ (IU) şi deci $BE = CF$. Deoarece $\triangle AEB \equiv AF$C (LUL) rezultă că $AE = AF$.
b) Din $BE = CF$, E, F, $\in (BC)$ rezultă că $BF = CE$. Cum O este intersecţia mediatoarelor OM şi ON, rezultă că $OA \perp \perp BC$, iar dacă $OA \cap BC = \{P\}$, avem şi $PB = PC$. Atunci avem $PE = PF$ şi $\sphericalangle OAE = \sphericalangle OAF$.

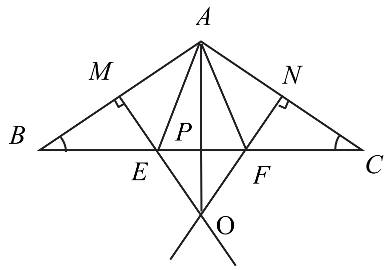


Fig. 43

2. i) În cazul m($\sphericalangle BAC$) < 90° avem Fig 44. ii) Dacă m($\sphericalangle BAC$) = 90°, avem Fig 45. În acest caz $E = F = O = P$.

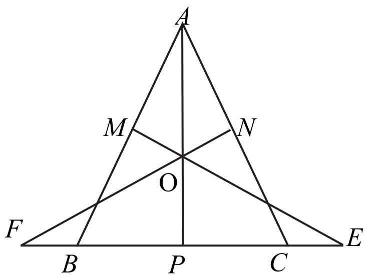


Fig. 44

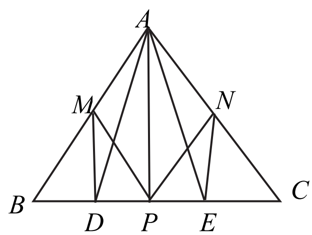


Fig. 45

3. a) Avem $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ din $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$ (LUL). Din $\triangle BAP \equiv \triangle CAP$ rezultă $\sphericalangle BAP \equiv \equiv \sphericalangle CAP$, m($\sphericalangle APB$) = m($\sphericalangle APC$) = 90° şi atunci ($AP$) este mediatoare în $\triangle ABC$ (Fig. 45).
b) $\triangle MAP \equiv \triangle NAP$ (LUL) $\Rightarrow MP = NP$. c) $\triangle MBD \equiv \triangle NCE \Rightarrow MD = NE$. d) $\triangle AMD \equiv \triangle ANP$ (LLL) $\Rightarrow$ m($\sphericalangle AMD$) = m($\sphericalangle ANE$) $\Rightarrow$ m($\sphericalangle AMD$) + m($\sphericalangle CNE$) = m($\sphericalangle AMD$) + 180° – m($\sphericalangle ANE$) = 180°.
4. Rezolvare analogă cu problema 3 (Fig. 46).
5. a) Avem $AC = AE \Rightarrow \sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle ACE$ (Fig. 47). Din $AB = AD$, $AE = AC$ rezultă că $BE = DC$. Din $\triangle ABC \equiv \equiv \triangle ADE$ (LUL) $\Rightarrow \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADE$. Avem m($\sphericalangle MBD$) = = m($\sphericalangle ABC$) – m($\sphericalangle ABD$) = m($\sphericalangle ADE$) – m($\sphericalangle ADB$) = = m($\sphericalangle MDB$) şi deci $MB = MD$. Din $\triangle ABC \equiv \triangle ADE$ rezultă $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle AED$. Cum $\sphericalangle ACE \equiv \sphericalangle AEB$ rezultă că

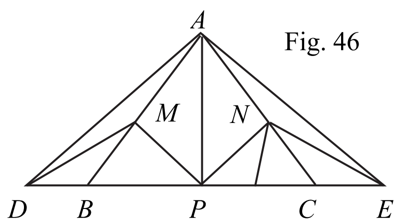


Fig. 46

$\sphericalangle MCE \equiv \sphericalangle MEC$ şi deci $MC = ME$. Altfel: $\triangle ABC \equiv \triangle ADE \Rightarrow BC = DE$. Cum $MB = MD$, rezultă că $MC = ME$. b) Deoarece $NE = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}CB = PC$, rezultă că $\triangle ANE \equiv \triangle APC$ (LUL) şi deci $AN = AP$. *c*) Din $\triangle EAM \equiv \triangle CAP$ (LUL) rezultă că $\sphericalangle CAM = \sphericalangle EAM$. Cum $\sphericalangle CAP \equiv \sphericalangle EAN$ rezultă că $\sphericalangle PAM \equiv \sphericalangle NAM$.

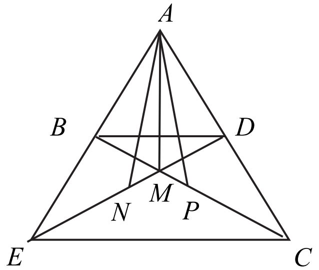


Fig. 47

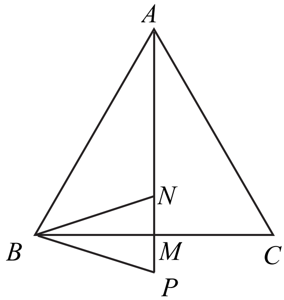


Fig. 48

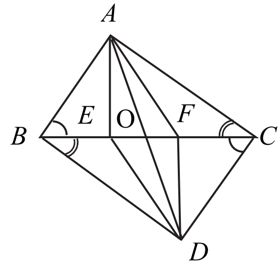
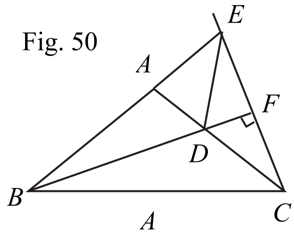


Fig. 49

6. Fie punctul $P \in (NM$ astfel încât $MN = MP$ (Fig. 48). Cum $NM \perp BC$ rezultă că $\triangle BMN \equiv \triangle BMP$ şi deci $BP = BN$. Avem $m(\sphericalangle PBM) = 15°$, $m(\sphericalangle ABP) = 75°$, $m(\sphericalangle ABN) = 45°$, $m(\sphericalangle BAP) = 30°$, $m(\sphericalangle APB) = 75°$. Avem $AC = AB = AP = AM + MP = AM + MN$.

7. a) Avem $AE = DF$ (înălţimi corespunzătoare la laturi congruente în triunghiuri congruente (Fig. 49). Din $\triangle AEB \equiv \triangle DFC$ (IC) rezultă că $BE = CF$, $BE = BC - CF = BC - BE = CE$. b) Din $\triangle AEF \equiv \triangle DFE$ (CC) rezultă că $AF = DE$. c) Din $\triangle AED \equiv \triangle DFA$ (LLL) rezultă că $\sphericalangle EAOP \equiv \sphericalangle FDO$. Din $\triangle AEO \equiv \triangle DFO$ rezultă că $OE = OF$ şi deci $OB = OE + BE = OF + FC = OC$.

Fig. 50


8. a) Fie $BD \cap CE = \{F\}$ (Fig. 50). Deoarece $\sphericalangle EBF \equiv \sphericalangle CBF$ şi $BF \perp CE$ rezultă că $\triangle CDE$ este isoscel cu $DE = DC$. b) Avem $AD + DE + AE = (AD + DC) + AE = AC + AE = AB + AE = BE = BC = a$ (cm).

9. a) Deoarece $AB = AC$, avem $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ (Fig. 51). Deoarece $DB \perp BC$, $EC \perp BC$ avem $m(\sphericalangle DBA) = 90° - m(\sphericalangle ABC) = 90° - m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle ACE)$. Cum $DA \perp AC$, $EA \perp AB$ avem $m(\sphericalangle DAB) = 90° - m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle EAC)$. Din congruenţa triunghiurilor ABD şi ACE rezultă $BD = CE$ şi $AD = AE$.
b) $\triangle DBC \equiv \triangle ECB$ (CC) $\Rightarrow BE = CD$.

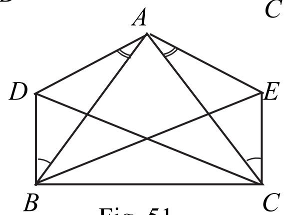


Fig. 51

10. $AB = AC \Rightarrow \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$. Avem $\triangle EBC \equiv \triangle FCB$ (LUL) şi deci $\sphericalangle BCE \equiv \sphericalangle CBF$, $\sphericalangle BEC \equiv \sphericalangle BFC$, $\sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle AFB$, $BF = CE$. Din $AB = AC$, $BE = CF$ rezultă $AE = AF$ (Fig. 52). Avem $\sphericalangle DBE \equiv \sphericalangle DCF$. Avem $\triangle AEC \equiv \triangle AFB$ (ULU) şi deci $BD = CD$, $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ (LLL). Obţinem $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$. Notând $AD \cap BC = \{M\}$ rezultă că $\triangle ABM \equiv \triangle CAM$ (LUL) şi deci $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle AMC$, de unde $AD \perp BC$.

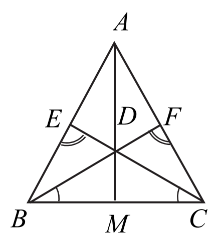


Fig. 52

11. a) Avem $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ (Fig. 53). Cum $EB \perp BA$ şi $FC \perp AC$ rezultă că $\sphericalangle EBC = \sphericalangle FCB$ şi deci $\triangle EBC \equiv \triangle FCB$ (LUL). Obţinem $EC = FB$.
b) Cum $\sphericalangle NBC \equiv \sphericalangle NCB$ rezultă că $NB = NC$. Avem $m(\sphericalangle DBC) = 90° - m(\sphericalangle BAC) = 90° -$