

Ora de matematică

CLASA a VI-a

Lucrarea este elaborată în conformitate cu programele școlare în vigoare.

Editor: Ovidiu Bărbulescu

Comenzi: **Marius Dorbin** (0722. 319. 653)

<http://www.librarianomatrix.ro>

ISBN 978-606- 94029-9-3

Copyright © Editura Nominatrix, 2015
Toate drepturile aparțin Editurii Nominatrix.

Petre Năchilă (coordonator)

Ion Bilciurescu
Roxana Georgescu
Romelia Șcheau

Felicia Georgescu
Luminița Istrate
Magdalena Vasile

Ora de matematică

Clasa a VI-a

Editura NOMINATRIX

ALGEBRĂ

CAPITOLUL 1 Mulțimea numerelor naturale

1.1. Operații cu numere naturale; reguli de calcul cu puteri

Mulțimea numerelor naturale se notează cu \mathbb{N} .

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Operații cu numere naturale:

1. adunarea și scăderea, care sunt operații de ordinul întâi;
2. înmulțirea și împărțirea, care sunt operații de ordinul al doilea;
3. ridicarea la putere, care este operație de ordinul al treilea.

Proprietăți ale operațiilor cu numere naturale:

1. Adunarea este comutativă, asociativă și are elementul neutru 0;
2. Înmulțirea este comutativă, asociativă și are elementul neutru 1;
3. Înmulțirea este distributivă față de adunare și scădere.

Ordinea efectuării operațiilor:

1. Dacă într-un exercițiu nu sunt paranteze, atunci operațiile se efectuează de la stânga la dreapta, în următoarea ordine: mai întâi se efectuează operațiile de ordinul al treilea, apoi operațiile de ordinul al doilea și la final operațiile de ordinul întâi.
2. Dacă într-un exercițiu există paranteze, atunci se efectuează mai întâi operațiile din parantezele rotunde, apoi cele din parantezele pătrate și la final operațiile din accolade.

Reguli de calcul cu puteri

Definiție. Fie a și n două numere naturale, cu $n \geq 2$. Se numește puterea n a lui a , notată cu a^n (citim: a la n), produsul lui a cu el însuși de n ori,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}$$

a^n = putere;

a = baza puterii;

n = exponentul puterii.

Convenție: $a^0 = 1$, dacă $a \neq 0$; 0^0 nu are sens; $a^1 = a$.

Proprietăți

Fie a, b, m, n numere naturale cu $a, b \neq 0$

1. Înmulțirea puterilor cu aceeași bază: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2. Împărțirea puterilor cu aceeași bază: $a^m : a^n = a^{m-n}$;
3. Puterea unei puteri: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;
4. Puterea unui produs: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;
5. Puterea unui cât: $(a : b)^n = a^n : b^n$, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $b | a$.

Compararea puterilor

1. Dintre două puteri cu aceeași bază, este mai mare cea cu exponentul mai mare: dacă $m < n$, atunci $a^m < a^n$, pentru orice numere naturale m, n și $a \geq 2$.
2. Dintre două puteri cu același exponent nenul, este mai mare cea cu baza mai mare: dacă $a < b$, atunci $a^m < b^m$, pentru orice numere naturale $a, b \geq 2, m \geq 1$.
3. Pentru a compara două puteri cu baze diferite și expoziții diferite, fie se aduc puterile la aceeași bază sau la același exponent, fie se compară cu alte puteri care au aceeași bază sau același exponent cu puterile considerate.

Pătrate perfecte. Numerele naturale care pot fi scrise ca puterea a două a unui număr natural se numesc pătrate perfecte.

Observații:

1. Orice număr natural scris ca o putere cu exponentul par este pătrat perfect;
2. Orice pătrat perfect are ultima cifră 0, 1, 4, 5, 6 sau 9;
3. Dacă un număr natural are ultima cifră 2, 3, 7 sau 8, atunci nu este pătrat perfect;
4. Dacă un număr natural se află între două pătrate perfecte consecutive, atunci numărul nu este pătrat perfect.

Cuburi perfecte. Numerele naturale care pot fi scrise ca puterea a treia a unui număr natural se numesc cuburi perfecte.

Observație. Dacă un număr natural se află între două cuburi perfecte consecutive, atunci numărul nu este cub perfect.

Probleme rezolvate

1. Calculați: $32 \cdot 4 + (5^4)^6 : 5^{22} - 121 : 11$.

Soluție: $32 \cdot 4 + (5^4)^6 : 5^{22} - 121 : 11 = 32 \cdot 4 + 5^{24} : 5^{22} - 121 : 11 = 32 \cdot 4 + 5^2 - 121 : 11 = 128 + 25 - 11 = 153 - 11 = 142$.

2. Calculați: $50 \cdot [100 : 4 + 5 \cdot (3^2 + 48 : 12)] + 2000$.

Soluție: $50 \cdot [100 : 4 + 5 \cdot (3^2 + 48 : 12)] + 2000 = 50 \cdot [100 : 4 + 5 \cdot (9 + 4)] + 2000 = 50 \cdot (100 : 4 + 5 \cdot 13) + 2000 = 50 \cdot (25 + 65) + 2000 = 50 \cdot 90 + 2000 = 4500 + 2000 = 6500$.

3. Arătați că următorul număr este pătrat perfect:

$$a = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2014) + 2015.$$

Soluție: $a = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2014) + 2015 = 2 \cdot (2014 \cdot 2015 : 2) + 2015 = 2014 \cdot 2015 + 2015 = 2015 \cdot (2014 + 1) = 2015 \cdot 2015 = 2015^2$.

4. Arătați că numărul 13^{2014} se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte.

Soluție: $13^2 = 12^2 + 5^2$. Rezultă $13^{2014} = 13^{2012} \cdot 13^2 = 13^{2012}(12^2 + 5^2) = 13^{2012} \cdot 12^2 + 13^{2012} \cdot 5^2 = (13^{1006})^2 \cdot 12^2 + (13^{1006})^2 \cdot 5^2 = (13^{1006} \cdot 12)^2 + (13^{1006} \cdot 5)^2$.

Probleme propuse

• Operații cu numere naturale

1. Calculați:

2. Calculați:

- a) $423 + 1008 - 215$; b) $215 + 141 \cdot 17 - 1794$;
 c) $23500 : 20 + 18 \cdot 35 - 725 : 25$. d) $675 \cdot 2 - 2128 : 4 + 15 \cdot 25$.

3. Calculati:

- a) $23 + (48 \cdot 5 - 36) : 4 + 2015$;
 b) $[235 + (829 - 121) : 2 + 670] \cdot 32$;
 c) $10 \cdot \{2 + 10 \cdot [126 + 10 \cdot (24 + 24 : 2 - 6)]\} - 42600$;
 d) $7747 : [17 + 24 \cdot 3 - (36 : 2 + 893 : 19) + 10 \cdot 3 + 7] - 127$.

4. Calculati: $2014 \cdot 2013 + 2014 \cdot 2015 - 2014 \cdot 4028$.

5. Află numărul natural q care verifică relația: $\{(q : 2) + q\} : 3\} : 4 = 10$.

6. Calculați suma dintre cel mai mare număr natural de trei cifre, format cu cifre diferite două câte două și cel mai mic număr natural de trei cifre.

7. Calculați diferența dintre cel mai mic număr natural de cinci cifre diferite două câte două și cel mai mare număr natural de patru cifre diferite două câte două.

8. Calculați:

- a) $1^0 + 0^{2015} + 2015^0$; b) $2^3 + 3^2 + 2015^1$;
 c) $5^2 - 10^1 + 10 : 2 + 5^0$; d) $7^0 + 1^{2015} + 27 \cdot 2$.

- *Reguli de calcul cu puteri*

9. Efectuați, utilizând regula $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$:

- a) $2^{18} \cdot 2^{30}$; b) $11^{31} \cdot 11^{30}$; c) $3^7 \cdot 3^{15}$; d) $5^{100} \cdot 5^{200}$.
 e) $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3$; f) $4^2 \cdot 4^3 \cdot 4^5$; g) $5 \cdot 5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4$; h) $6^2 \cdot 6^3 \cdot 6^5 \cdot 6^{100}$.

- 10.** Efectuați utilizând regula $a^m : a^n = a^{m-n}$:
- a) $2^{90} : 2^{70}$; b) $5^{137} : 3^{35}$; c) $7^{38} : 7^3$; d) $6^{30} : 6^{20}$;
e) $21^{18} : 21^{10} : 21^8$; f) $(3^{30} : 3^{17}) : 3^4$; g) $4^{22} : 4^3 : 4^7$; h) $7^{45} : (7^{21} : 7^9)$.
- 11.** Scrieți sub forma unei singure puteri, utilizând regula: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$:
- a) $(5^3)^6$; b) $(7^9)^3$; c) $(14^{11})^7$; d) $(11^{11})^6$.
e) $[(5^2)^4]^3$; f) $[(6^5)^3]^5$; g) $[(13^6)^5]^4$; h) $[(8^2)^7]^{22}$.
- 12.** Utilizând regula: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, efectuați:
- a) $(2 \cdot 5)^{15}$; b) $(3 \cdot 4)^7$; c) $(2 \cdot 3 \cdot 5)^{23}$; d) $(5 \cdot 6 \cdot 7)^{53}$.
e) $3^5 \cdot 8^5$; f) $2^{14} \cdot 6^{14}$; g) $3^{14} \cdot 5^{14} \cdot 6^{14}$; h) $[3 \cdot (4 \cdot 5)^3]^{12}$.
- 13.** Utilizând regula: $(a : b)^n = a^n : b^n$, efectuați:
- a) $15^{25} : 3^{25}$; b) $135^{50} : 5^{50}$; c) $27^{20} : 9^{20}$; d) $16^{35} : 4^{35}$.
e) $(27 : 3)^{24}$; f) $(36 : 4)^{30}$; g) $(50 : 5)^{10}$; h) $(35 : 7)^{120}$.
- 14.** Comparați numerele:
- a) 9^{16} cu 3^{32} ; b) 4^{18} cu 2^{35} ; c) 25^{17} cu 5^{52} ; d) 4^{100} cu 2^{199} .
e) 1000^{10} cu 10^{1000} ; f) 8^{13} cu 4^{20} ; g) 9^{50} cu 27^{10} ; h) 27^{8^2} cu 9^{10^2} .
- 15.** Arătați că următoarele numere sunt atât pătrate perfecte cât și cuburi perfecte.
- a) $27 \cdot 15 + 27 \cdot 12$; b) $8 \cdot 9 + 8 \cdot 6 - 8 \cdot 7$; c) $64 \cdot 50 + 64 \cdot 14$.
d) $2^{91} - 2^{90}$; e) $3^{61} - 3^{60} - 3^{60}$; f) $(7^{41})^2 \cdot (7^2)^{11}$.
- 16.** Calculați:
- a) $(7 + 11^{198} : 11^{196}) : 64$;
b) $3^2 - 3^2 \cdot (2^5 - 2^4 - 2^3 - 2^2 - 2^1 - 2^0)$;
c) $[6 \cdot 10^3 - (25 \cdot 4 - 40) \cdot 5] - (10^2 \cdot 7 + 10^3 : 25 \cdot 35)$;
d) $[(9 - 2^3)^{10} + (17 - 2^4)^{13}]^5$;
e) $2^3 + [(2^3)^8 - (2^8)^3] \cdot 3 \cdot 3^{2015}$;
f) $100 \cdot \{23^2 : 529 + 2 \cdot [(2^{60} \cdot 3^{20}) : (2^{59} \cdot 3^{20}) - 2015^0]\}$.

*** ***

• Operații cu numere naturale

- 17.** Suma a patru numere naturale este 15. Determinați cea mai mică valoare a produsului lor.
- 18.** Produsul a două numere naturale diferite este 169. Determinați suma lor.
- 19.** Dacă $x \cdot y = 40$ și $x \cdot z = 35$, calculați $x \cdot (y + z)$ și $x \cdot (y - z)$.
- 20.** Dacă $xy = 50$, $xz = 40$, $xt = 30$, calculați $x \cdot (y + z + t)$ și $x \cdot (y + z - t)$.
- 21.** Calculați $(2 + 4 + \dots + 2014) - (1 + 3 + \dots + 2013)$.
- 22.** Calculați $(33 + 66 + \dots + 3000) : (11 + 22 + \dots + 1000)$.
- 23.** Suma a 7 numere naturale nenule distințte este 29. Determinați cele 7 numere.

24. Calculați:

a) $\left[(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 - 2^8 : 2^6\right] : 4;$
 b) $3^{77} : (3^{10} \cdot 3^5)^5 + 5(400 - 200 : 2);$
 c) $7^{36} : (7^2 \cdot 7^{33}) \cdot (7^2 + 7 \cdot 25) : 14;$
 d) $\left[\left(4^3\right)^2 : 2^8 + 4^2 - 2\right] \cdot \left[\left(4^3\right)^2 : 4^5 + 2 \cdot 4^2 + 4^7 : 4^6 + 2015^0\right].$

- *Reguli de calcul cu puteri*

25. Calculați: $a = (b - c)^{2015}$, unde:

$$c = 81 \cdot 5^4 - 15^4 + 2.$$

26. Ordonați crescător numerele:

$$c = 123 \cdot 19 - 2010 + 51 \cdot 57 : 9 + 10^9 \cdot 10^9 : (10^2)^8$$

27. Arătați că următoarele numere sunt pătrate perfecte:

a) $a = 2(1 + 2 + 3 + \dots + 2015) + 2016$.
 b) $b = 1 + 3 + 5 + \dots + 2015$.
 c) $c = 100 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 100 + \dots + 49 \cdot 100$.

28. Determinați ultima cifră a numerelor:

a) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2015}$,
 b) $5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^{2014}$,
 c) $6^0 + 6^1 + 6^2 + \dots + 6^{2015}$,
 d) $3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2016}$.

29. Arătați că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte:

$$\begin{aligned} \text{a)} & x = 5 \cdot 2014 + 6^{2015} + 1001^{2016}; \\ \text{b)} & y = 2^{2003} + 3^{2003} + 4^{2003} + 5^{2003} + 6^{2003} + 7^{2003}. \end{aligned}$$

30. a) Arătați că 5^{2016} se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte.

b) Arătați că 9^{2012} se poate scrie ca o sumă de trei pătrate perfecte.

c) Arătați că 52^{1201} se poate scrie ca o sumă dintre un cub perfect și un pătrat perfect.

31. Determinați numărul natural x care verifică egalitățile:

a) $3^{x+2} - 5 \cdot 3^x = 108$; b) $2^{61} + 2^{62} + 2^{63} = x \cdot 2^{60}$;
 c) $14 \cdot 4^x - 5 \cdot 4^x = 9 \cdot 2^{14}$; d) $5^{x+3} - 5^{x+2} - 5^{x+1} = 19 \cdot 5^{2x}$.

32. Determinați numărul natural n pentru care sunt adevărate egalitățile:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 3^{1+2+3+\dots+20} = 3^{21n}; & \text{b) } 5^{2+4+6+\dots+30} = 5^{n(n+1)}; \\ \text{c) } 15^{1+3+5+\dots+61} = 15^{n^2}; & \text{d) } 7^{20+24+\dots+48} = 49^n. \end{array}$$

33. Determinați două numere naturale a căror sumă este 733, iar suma răsturnatelor celor două numere este 337.
34. Determinați numerele naturale n știind că împărțind pe n la 19 se obține câtul egal cu restul împărțirii lui n la 13, iar împărțind pe n la 13 se obține câtul egal cu restul împărțirii lui n la 19.
35. Scrieți următoarele numere ca produs de două numere consecutive:
- a) 111222; b) 1111122222; c) $\underbrace{111\dots1}_{n \text{ cifre}} \underbrace{222\dots2}_{n \text{ cifre}}, n \in \mathbb{N}^*$.
36. Demonstrați că există numere naturale nenule m, n și numere naturale de două cifre \overline{ab} pentru care $\overline{mab} \cdot \overline{nab} = \overline{pab}$, unde $p \in \mathbb{N}^*$.
37. Fie a cifra nenulă și fie $n \in \mathbb{N}^*$.
- a) Determinați numărul $S(n) = \overline{a} + \overline{aa} + \overline{aaa} + \dots + \underbrace{\overline{aa\dots a}}_{n \text{ cifre}}$.
- b) Determinați suma cifrelor numărului $S(n)$, pentru $n \leq 3$.
38. Scrieți ca sumă de două pătrate de două numere naturale următoarele numere:
- a) 10^2 ; b) 10^3 ; c) 10^{2n} ; d) $10^{2n+1}, n \in \mathbb{N}^*$.
39. Determinați numărul cifrelor de 9 care apar în scrierea zecimală a următoarelor numere:
- a) $3 \cdot (10^{30} - 1)$; b) $4 \cdot (10^{50} - 3)$; c) $5 \cdot (10^n - 1)$; d) $8 \cdot (10^n - 1), n \in \mathbb{N}^*$.
40. Determinați pătratele perfecte de forma:
- a) $2^6 + 2^7 + 2^n, n \in \mathbb{N}^*$; b) $2^m + 2^{m+1} + 2^n, m \in \mathbb{N}^* \text{ fixat}, n \in \mathbb{N}^*$.
41. Determinați numerele \overline{abc} pentru care avem $a^{b+c} + a^b + a^c = 819$.
42. a) Calculați suma: $9^{13} - 10 \cdot 9^{12} + 10 \cdot 9^{11} - 10 \cdot 9^{10} + \dots + 10 \cdot 9 - 1$.
b) Generalizați.

CUPRINS

ALGEBRĂ

CAPITOLUL 1. MULTIMEA NUMERELOR NATURALE

1.1. Operații cu numere naturale; reguli de calcul cu puteri	5
1.2. Divizor, multiplu. Criteriile de divizibilitate cu 10, 2, 5, 3, 9	11
1.3. Numere prime și numere compuse.....	17
1.4. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime.....	20
1.5. Proprietăți ale relației de divizibilitate în \mathbb{N}	23
1.6. Divizori comuni a două sau mai multor numere naturale; c.m.m.d.c.; numere prime între ele.....	26
1.7. Multipli comuni a două sau mai multor numere naturale; c.m.m.m.c; relația dintre c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.	30
1.8. Probleme simple care se rezolvă folosind divizibilitatea	33
<i>TESTE DE EVALUARE</i>	35

CAPITOLUL 2. MULTIMEA NUMERELOR RAȚIONALE POZITIVE

2.1. Fracții echivalente; fracție ireductibilă; noțiunea de număr rațional; forme de scrierea unui număr rațional; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$	37
2.2. Adunarea numerelor raționale pozitive; scăderea numerelor raționale pozitive	44
2.3. Înmulțirea numerelor raționale pozitive.....	51
2.4. Ridicarea la putere cu exponent natural a unui număr rațional pozitiv; reguli de calcul cu puteri	56
2.5. Împărțirea numerelor raționale pozitive.....	60
2.6. Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive	64
2.7. Media aritmetică ponderată a mai multor numere raționale pozitive.....	68
2.8. Ecuații	72
2.9. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	76
<i>TESTE DE EVALUARE</i>	80

GEOMETRIE

CAPITOLUL 3. DREAPTA

3.1. Punct. Dreaptă. Plan.....	84
3.2. Semidreaptă. Semiplanul	91
3.3. Pozițiile relative a două drepte.....	97
3.4. Segmentul	101
3.5. Lungimea unui segment; distanța dintre două puncte. Segmente congruente; construcția unui segment congruent cu un segment dat; mijlocul unui segment; simetricul unui punct față de alt punct.....	105
<i>TESTE DE EVALUARE</i>	111

CAPITOLUL 4. UNGHIURI

4.1 Unghi. Unghi nul. Unghi alungit	114
4.2. Măsurarea unghiurilor cu raportorul. Unghi drept. Unghi ascuțit. Unghi obtuz.....	117
4.3. Calcule cu măsuri de unghiuri exprimate în grade și minute sexagesimale. Unghiuri suplementare, unghiuri complementare	121
4.4. Unghiuri adiacente, bisectoarea unui unghi	124
4.5. Unghiuri opuse la vârf, congruența lor; unghiuri în jurul unui punct, suma măsurilor lor.....	129
<i>TESTE DE EVALUARE</i>	134

CAPITOLUL 5. CONGRUENȚA TRIUNGHIURILOR

5.1. Triunghiul	137
5.2. Construcția triunghiului	141
5.3. Congruența triunghiurilor. Criteriile de congruență.....	144
5.4. Metoda triunghiurilor congruente (M.T.C.). Raționamentul în geometrie	150
<i>TESTE DE EVALUARE</i>	153

VARIANTE DE LUCRĂRI SEMESTRIALE. SEMESTRUL I 155