SOLUȚII TESTE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem**

Testul 1

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{4}$.

2. $x \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0\}$.

3. $x > 0$; $\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = 8 \Rightarrow \log_2 x = 6 \Rightarrow x = 64$.

4. Muțimea are 45 de elemente; dintre ele, 15 sunt divizibile cu 3 $\Rightarrow$ 45 – 15 = 30 elemente nu se divid cu 3.

5. Fie M mijlocul lui $BC \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $AM = \sqrt{\left(4-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow AM = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

6. $M(x, y) \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 7\vec{i} + 9\vec{j} \Leftrightarrow (x-3)\vec{i} + (y-4)\vec{j} + (x-1)\vec{i} + (y-5)\vec{j} = 7\vec{i} + 9\vec{j} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x-4)\vec{i} + (2y-9)\vec{j} = 7\vec{i} + 9\vec{j} \Rightarrow x = \frac{11}{2}$; $y = 9 \Rightarrow M\left(\frac{11}{2}, 9\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-2a & 2a \\ -2a & 1+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = -1$; c) Prin inducție.

2. a) $f(1) = 0 \Rightarrow m^2 + 8m + 15 = 0 \Rightarrow m \in \{-5; -3\}$;

b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{4m}{4} = 0 \Rightarrow m = 0$;

c) Pentru $m = -5 \Rightarrow 4x^4 - 20x^3 + 32x^2 - 20x + 4 = 0 \mid : 4 \Rightarrow x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$, ecuație reciprocă de gradul 4 cu soluțiile $x_1 = x_2 = 1, x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. a) $f'(x) = 3(2x+1)$;

b) Pentru $x \le -\frac{1}{2}$, f descrescătoare; pentru $x \ge -\frac{1}{2}$, f crescătoare. Valoarea minimă a lui f este $\frac{1}{4}$;

c) $f''(x) = 6 > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. a) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e-1}} \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \ln(1+x^2)\Big|_1^{\sqrt{e-1}} = 1-\ln 2$;

b) Fie $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$; $f(x) > 0$, $\forall\, x\in(0,\infty) \Rightarrow F'(x) > 0$, $\forall\, x\in(0,\infty) \Rightarrow F$ crescătoare pe $(0,\infty)$;

c) $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx > \int_2^4 f(x)dx \Leftrightarrow \ln(x^2+1)\Big|_0^2 > \ln(x^2+1)\Big|_2^4 \Leftrightarrow \ln 5 - \ln 1 > \ln 17 - \ln 5 \Leftrightarrow$

$\displaystyle\Leftrightarrow \ln 5 > \ln\left(\frac{17}{5}\right) \Leftrightarrow 5 > \frac{17}{5}$ (A).

TESTUL 2

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. $r = 4 \Rightarrow (1+n)\cdot\dfrac{(n+3)}{4}\cdot\dfrac{1}{2} = 231 \Rightarrow n = 41.$

2. Se arată că pentru $x, y\in(3;8)$, $x<y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

3. $x\ge 3$, $x\in\mathbb{N} \Rightarrow (x-1)+\dfrac{(x-2)(x-1)}{2} \le 9 \Rightarrow x^2-x-18\le 0 \Rightarrow$ soluția $x\in\{3;4;5;6\}$.

4. Numărul total de submulțimi este $2^n = 32$. Numărul total de submulțimi care nu-l conțin pe 0 este $2^4 = 16 \Rightarrow$ numărul submulțimilor care-l conțin pe 0 este $32-16 = 16$.

5. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1\\ -2 & 3 & 1\\ -3 & 4 & 1\end{vmatrix} = 0$.

6. M mijlolcul lui $BC \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = \left|2\cdot\overrightarrow{AM}\right| = 2\cdot\left|\overrightarrow{AM}\right| = 2\cdot\dfrac{BC}{2} = BC = 5$;

$\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = 5$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

2. a) $x\circ 4 = 4\circ x = x$, $\forall\, x\in\mathbb{Z}$;

b) 3 este elementul neutru al legii „*”; $f(3) = 0$ şi $f(4) = 1 \Rightarrow a = 1$; $b = -3$;

c) $x\circ y = (x-3)(y-3)+3$; $\underbrace{x\circ x\circ..\circ x}_{2010\text{ ori}} = 2^{2010}+3 \Leftrightarrow (x-3)^{2010}+3 = 2^{2010}+3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)^{2010} = 2^{2010} \Rightarrow x\in\{1;5\}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. a) $f'(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{x}{1+x^2}$;

b) $f''(x) = \dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2} \ge 0 \Rightarrow f'(x)$ crescătoare pe $\mathbb{R}$;

c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$	+ + + + +	+ + + + + +	0	+ + + + + +	+ + + + + +
$f'(x)$	− − − − ↗	− − − − −	0	+ + + + + ↗	+ + + + +
$f(x)$	↘		0	↗	

2. a) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) + \ln(\cos 0) = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln 1 = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1} = \ln 2$.

b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x(\operatorname{tg} x - 1)\, dx \le 0$ pentru că $\forall\ x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\operatorname{tg} x \ge 0$; $\operatorname{tg} x \le 1$;

c) $I_{n+2} + I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x(\operatorname{tg}^2 x + 1)\, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n+1} x}{n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}$.

TESTUL 3

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 = 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\cdot\frac{c}{a} = \frac{21}{4}$.

2. $f(x) = g(x) \Rightarrow x + 1 = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $f(1) = 2$, $f(4) = 5$, $G_f \cap G_g = \{A(1; 2); B(4; 5)\}$.

3. $2 - 5 + 3 = 0$.

4. $C_5^2 = 10$.

5. Fie mijlolcul lui $AC \Rightarrow M(0, -1) \Rightarrow BM = 2\sqrt{2}$.

6. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. a) $A^3 = O_3$; b) $I_3 + A + {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; rangul = 1; c) $(I_3 + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a) $x * y = (x + 1)(y + 1) - 1$; $(x * y) * z = x * (y * z) = (x + 1)(y + 1)(z + 1) - 1$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$;

b) $x * (-1) = (x + 1(-1 + 1) - 1 = -1$;

c) $f(x * y) = (x + 1)(y + 1) - 1 + 1 = (x + 1)(y + 1) = f(x) \cdot f(y)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. a) $\lim_{x\to\infty}\left(x - \frac{x^2 - x + 1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{-1}{x}\right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$;

b) $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$;

x	$-\infty$		-1			0			1		$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	–	– |		–	–	0	+	+
$f(x)$	↗			↘		|	↘			↗	

c) $y = x - 1$ asimptotă oblică la $+\infty$.

2. a) $l_s(0) = l_d(0) = f(0) \Rightarrow f$ continuă în $x = 0 \Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$;

b) $F(x) = \begin{cases} xe^x - e^x + C, & x \le 0 \\ -\cos x + C, & x > 0 \end{cases}$;

c) $A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |f(x)|\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} -\sin x\, dx = 2$.

TESTUL 4

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. $\dfrac{3^6 - 1}{3 - 1} = 364$.

2. $x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow m = 0$.

3. $x = 2$.

4. Numărul cazurilor totale este $A_4^3 = 24$. Numărul cazurilor favorabile este 6 $\Rightarrow p = \dfrac{1}{4}$.

5. $\left(-\vec{i} + 4\vec{j}\right) + \left(-3\vec{i} + \vec{j}\right) = (x_D - 1)\vec{i} + (y_D + 1)\vec{j} \Rightarrow D(-3, 6)$.

6. $A_{n+1}(2n+1, 2n+3) \Rightarrow A_n A_{n+1} = 2\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. a) $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$;

b) $(m-1)^2 \neq 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} - \{1\}$; $x = -1$; $y = \dfrac{3m - m^2 - 2}{(m-1)^2} \Rightarrow y = \dfrac{2-m}{m-1}$, $z = \dfrac{m^2 + m - 3}{m-1}$;

c) $x - y < z \Rightarrow \dfrac{m^2 + m - 2}{m-1} > 0 \Rightarrow m \in (-1, 1) \cup (2, \infty)$.

2. a) $(x * y) * z = x + y + z + 2\sqrt{3}$;

b) $3^x + 9^x = 6; 3^x = t > 0 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow t = 2$ soluție $\Rightarrow x = \log_3 2$;

c) $N = 4\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. b) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x^2 + x\sqrt{2} - 1\right)}{x - \sqrt{2}} = 3$;

c) $f'(x) = 3x^2 - 3$; $x = -1$ punct de maxim local; $x = 1$ punct de minim local.

2. a) $I_1 = \dfrac{4}{3}$; $I_2 = \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\, dx = \dfrac{16}{5}$;

b) $x \in [-1, 1] \Rightarrow x^2 \in [0, 1] \Rightarrow -x^2 \in [-1, 0] \Rightarrow 1 - x^2 \in [0, 1]$;

c) $0 \le 1 - x^2 \le 1$, $\forall\, x \in [-1, 1] \Rightarrow 0 \le (1 - x^2)^n \le 1 \Rightarrow 0 \le \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n dx \le \int_{-1}^{1} 1\, dx \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \le I_n \le 2$.

TESTUL 5

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. $\log_2 2 - \log_2 27 = 1 - 3\log_2 3 = 1 - 3a$.

2. $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$; $V\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

3. 25.

4. $x^2 - x + 9 > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$; $x^2 - x + 9 = 9 \Rightarrow x = 0$; $x = 1$ soluții.

5. Ecuația dreptei AB: $x + 2y - 4 = 0$. De exemplu, $C(2, 1)$.

6. $x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. a) $\det X = -2$;

b) $\det B = -1 \neq 0 \Rightarrow B$ inversabilă; $B \cdot B = I_2 \Rightarrow B^{-1} = B$.

c) Relația este echivalentă cu $\begin{pmatrix} 0 & b-2a \\ 4a-2b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, fals, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

2. a) $a_4 = -10i$; $f(0) = -2i$;

b) $f = 0 \Rightarrow x_k = -\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{5}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow x_k \in \mathbb{R}$;

c) z rădăcină a lui $f \Rightarrow f(z) = 0 \Rightarrow (z - i)^5 = (z + i)^5 \Rightarrow |(z - i)^5| = |(z + i)^5| \Rightarrow |z - i| = |z + i|$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. b) $f'(x) = \frac{2(e^x - 1)(e^x + 1)(e^{2x} + 1)}{e^{4x} + 1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$; $e^x + 1 > 0$, $e^{2x} + 1 > 0$, $e^{4x} + 1 > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

$x \leq 0 \Rightarrow e^x - 1 \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ descrescătoare; $x \geq 0 \Rightarrow e^x - 1 \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ crescătoare;

c) $x = 0$ punct de minim $\Rightarrow f(x) \geq f(0)$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq \ln 2$.

2. a) $I_0 = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{7}{3}\right)$; $I_1 = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x + 3 - 3}{4x + 3}dx = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}\ln\left(\frac{7}{3}\right)$;

b) $4I_{n+1} + 3I_n = \int_0^1 \frac{4x^{n+1}}{4x+3}dx + \int_0^1 \frac{3x^n}{4x+3}dx = \int_0^1 \frac{x^n(4x+3)}{4x+3}dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$;

c) Cu teorema cleștelui $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{7}$.

TESTUL 6

SUBIECTUL I

1. $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{9}{8}$.

2. Sunt 8 multipli de 6.

3. $x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$.

4. $\text{Card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B) \Rightarrow \text{card}(A \cap B) = 1$.

5. $\begin{cases} 3x-2y+7=0 \\ 4x+y+2=0 \end{cases} \Rightarrow$ $(x, y)= (–1, 2)$.

6. $\cos u = 0 \Rightarrow u = \dfrac{\pi}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. a) $A, B \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 7b & a \end{pmatrix}$, $\det A = 1$, $a, b \in \mathbb{Q}$; $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 7d & c \end{pmatrix}$, $\det B = 1$, $c, d \in \mathbb{Q}$;

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 1$; $A \cdot B = \begin{pmatrix} ac+7bd & ad+bc \\ 7(ad+bc) & ac+7bd \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 21 & 8 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 21 & 8 \end{pmatrix} \in G \Rightarrow A^2, A^3, ..., A^n, ... \in G \Rightarrow G$ este infinită.

2. a) $q = X^4 + X^3 - 2X - 2$, $r = 3$;
b) $f(y_1) + f(y_2) = 6$;
c) $\left(x_1^2 + ... + x_6^2\right) - (x_1 + ... + x_6) + 6 = 6$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. a) $f'(x) = 2e^{2x} + 5e^x + 8 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ crescătoatre;

b) $f''(x) = 4e^{2x} + 5e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ nu are puncte de inflexiune;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{xe^x} = +\infty$.

2. a) $A = –1$; $B = 1$;
b) $y = 0$ asimptotă spre $\pm\infty$; $x = 1$; $x = 2$ asimptote verticale bilaterale;
c) $A = \int_3^4 f(x)\,dx = \int_3^4 \left(\dfrac{-1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}\right)dx = \left[\ln(x-2) - \ln(x-1)\right]\Big|_3^4 = \ln\left(\dfrac{8}{3}\right)$.

TESTUL 7

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $x > 0$; $\dfrac{5}{2} = 2\left(\lg\sqrt{x} + \dfrac{1}{3}\lg x\right) \Rightarrow x = 10^6$.

2. $–2((2x – 5) + 5(x + 7) = –3 \Rightarrow x = –48$.

3. $x + 2 > 0$; $x + 5 > 0 \Rightarrow x \in (–2, \infty)$; $\log_2\left(\dfrac{x+2}{x+5}\right) = 4 \Rightarrow \dfrac{x+2}{x+5} = 16 \Rightarrow S = \varnothing$.

4. $P = \dfrac{1}{3}$.

5. $\dfrac{5}{8} = \dfrac{a}{a-3} \Rightarrow a = –5$.

6. $\cos B = \dfrac{5+6-2}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{9}{2\sqrt{30}}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. a) $y \in \{1, 3\}$;

b) $y = 3$;

c) Se verifică prin calcul direct sau cu teorema Hamiltin-Cayley.

2. a) $0 \notin G$; $1 \in G$;

b) $x \in G \Rightarrow x = a - b\sqrt{10}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $a^2 - 10b^2 = 1$;

c) $\dfrac{1}{x} = a + b\sqrt{10} = a - (-b)\sqrt{10} \in G$;

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. b) $y = 0$ asimptotă orizontală către $+\infty$;

c) Pentru $x \in [e, \infty)$, f este descrescătoare; $2009 < 2010 \Rightarrow f(2009) \geq f(2010)$.

2. a) $h(x) = x$; $V = 21\pi$;

b) $F(x) = \dfrac{x^{2011}}{2011} + \dfrac{x^2}{2} + x + C$; $F(x)0) = 1 \Rightarrow C = 1$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^{2011}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{2011x^{2010}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{2010}+x+1}{2011\cdot x^{2010}} = \dfrac{1}{2011}$.

TESTUL 8

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $r = 3$; $S_{10} = 155$.

2. $x_1 = x_2 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow m = -\dfrac{1}{16}$.

3. $2^x(2^2 + 2^1 + 1) = 7 \Rightarrow x = 0$.

4. $x - \dfrac{15}{100}\cdot x = 510 \Rightarrow x = 600$.

5. $d(A, d) = \dfrac{|3\cdot(-1) + 4\cdot(-2) - 2|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{13}{5}$.

6. $\mathcal{A} = AB \cdot AD \cdot \sin A = 24$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$;

b) $f(A) = A^2 - 3A + I_3$;

c) $A^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -5 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. b) $2(x-3)(2x-3)+3=3 \Rightarrow x \in \left\{3, \dfrac{3}{2}\right\}$;

c) $e=\dfrac{7}{2}$; $x'=\dfrac{12x-35}{4(x-3)}$, $x \in \mathbb{R}-\{3\}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. a) $f'(x)=\dfrac{3}{x}+x^3=\dfrac{x^4+3}{x}$, $x \in (0, \infty)$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=4$;

c) $f''(x)=\dfrac{3x^4-3}{x^2}=\dfrac{3(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^2}$; pentru $x \in (0;\ 1] \Rightarrow f$ concavă; pentru $x \in$ $\in [1; \infty) \Rightarrow f$ convexă.

2. a) F derivabilă, $\forall\ x \in (0, \infty)$ şi $F'(x)=f(x) \Rightarrow F$ este o primitivă a funcţiei f;

b) $\int_1^2 2xe^x\,dx = 2xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 2e^x\,dx = 2xe^x\Big|_1^2 - 2e^x\Big|_1^2 = 2e^2$;

c) $A=\int_1^e |f(x)|\,dx=\int_1^e f(x)\,dx = F(x)\Big|_1^e = F(e)-F(1)=2^e-e-3$.

TESTUL 9

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. $10=\dfrac{x^2-x}{2} \Rightarrow x^2-x-20=0 \Rightarrow x \in \{-4, 5\}$.

2. $(f \circ f)(3)=f(f(3))=f(2)=0$.

3. $x>0$; $\sqrt[3]{x}=3 \Rightarrow x=27 \in (0, \infty)$.

4. $C_7^3=35$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ m & 5 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow m=3$.

6. $\dfrac{BC}{\sin A}=2R \Rightarrow BC=5$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. a) $\det(H(k))=k$;

b) $H(0)\cdot H(1)=I_3\cdot H(1)=H(1)$;

c) Se folosesc $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ şi $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. a) $2017 * 2018 = 4036$;

b) $2x+x^2+1 \le 4 \Leftrightarrow x^2+2x-3 \le 0 \Rightarrow x \in [-3; 1]$;

c) $n \ge 3$, $n \in \mathbb{N}$, $\left(C_n^1+C_n^2+1\right)+C_n^3+1=n+2 \Rightarrow A=\varnothing$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. a) $f'(x) = 2x - \dfrac{8}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$;

b) $f'(2) = -4$;

c) Pentru $x \in (-\infty, -1]$, respectiv $x \in (1, \infty)$, f convexă; pentru $x \in [-1, 1)$, f concavă.

2. a) $F(x) = \int x\sqrt{x^2-4}dx = \dfrac{1}{2}\int 2x \cdot (x^2-4)^{\frac{1}{2}} dx = \dfrac{1}{3} \cdot (x^2-4)^{\frac{3}{4}} + C$, $x \in [2, \infty)$;

b) $V = \pi \int_2^3 f^2(x)\,dx = \dfrac{253\pi}{15}$;

c) Cu regula lui l'Hospital se obține $\dfrac{1}{3}$.

TESTUL 10

SUBIECTUL I (30 puncte):

1. $\begin{cases} m - 2n + 4 = 0 \\ 3m - 2n = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 2$; $n = 3$.

2. $A_4^3 = 24$.

3. $x \in \left[-1, \dfrac{5}{2}\right] \cap \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0, 1, 2\}$.

4. $10 + 12 + \ldots + 98 = \dfrac{(10+98)\cdot 45}{2} = 2430$.

5. $\dfrac{11\sqrt{5}}{5}$.

6. Cu teorema cosinusului $\Rightarrow BC = 2\sqrt{5-2\sqrt{3}}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. a) $\det A = 3 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$.

b) $X = A^{-1}(3I_2) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a), b) Se verifică prin calcul direct.

c) Se folosește punctul b; $\left(\left(-\dfrac{2009}{2}\right) \circ \ldots \circ \dfrac{1}{2}\right) \circ \dfrac{3}{2} \circ \left(\dfrac{5}{2} \circ \ldots \circ \dfrac{2009}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. a) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$; pentru $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ descrescătoare; pentru $x \in [0, \infty) \Rightarrow f$ crescătoare;

b) $y = x$ asimptotă oblică la $+\infty$;

c) $y-5=\frac{4}{5}(x-4)$.

2. a) $x^2-4\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 2 \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{\pm 2\}$;

b) $F(x)=\int f(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^2-4)+C$, $x\in(2,+\infty)$;

c) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{21}\right)$.

TESTUL 11

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. 30.000 lei.

2. $M(2, 1)\Rightarrow AM=3$.

3. $\sin 105° = \sin(60° + 45°) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

4. $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k \Rightarrow k=6\Rightarrow T_7=C_8^6 x^5$.

5. $\left[\left(1+i\sqrt{3}\right)^3\right]^{300}=(-8)^{100}=2^{300}$.

6. $x>0;\ x>\frac{3}{4}\Rightarrow x\in\left(\frac{3}{4},\infty\right)$; $\lg(x^2)=\lg(4x-3)\Rightarrow x\in\{1;3\}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & a & a^2\end{pmatrix}$; $\det A=-(a-1)^2$; pentru $a\neq 1\Rightarrow$ rang $A=3$; pentru $a=1\Rightarrow$ rang $A=2$;

b) Pentru $a=1\Rightarrow \det A=0\Rightarrow \Delta_p=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1\neq 0$; z necunoscută secundară $\Rightarrow z=\alpha$;

$x=\alpha-2$; $y=3-2\alpha$, $\in\mathbb{R}$;

c) Sistemul este compatibil determinat $\Rightarrow a\in\mathbb{R}-\{1\}$; $x_0=-a$; $y_0=-(2a+1)$; $z_0=5a+6$;

$x_0^2-y_0^2+z_0^2=1\Rightarrow a\in\left\{-1,-\frac{17}{11}\right\}$.

2. a) $A(x)\cdot A(y)=A(x+y-2xy)=A\left(-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)$, $\forall\, x, y\in\mathbb{R}$. Elementul neutru este $A(0)$. Se verifică axiomele monoidului comutativ;

b) $U(G)=\left\{A(x),\ x\neq\frac{1}{2}\right\}$;

c) $A^n(x)=A\left((-2)^{n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $\lim\limits_{x \nearrow 3} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x \searrow -3} f(x) = -\infty$;

b) $f'(x) = \dfrac{6}{9-x^2}$, $x \in (-3; 3) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crescătoare $\forall\, x \in (-3; 3)$;

c) $y = \dfrac{2}{3}x$.

2. a) $I_1 = \int_0^1 \dfrac{x^2}{x+1}dx = -\dfrac{1}{2} + \ln 2$;

b) Prin calcul direct;

c) Se integrează egalitatea de la punctul b) pentru $x \in [0; 1]$ şi se trece la limită.

TESTUL 12

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$;i $\overline{z} = a - bi$; $z_1 = 0$; $z_2 = -i$; $z_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \dfrac{1}{2}$; $z_4 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \dfrac{1}{2}$.

2. $2^x = a$, $a > 0$. Ecuația decine $2a^2 + a - 10 = 0$, cu soluția convenabilă $a = 2 \Rightarrow x = 1$.

3. $d_1 \parallel d_2$; fie $A(-1, 0) \in d_1 \Rightarrow \mathrm{d}(d_1, d_2) = \mathrm{d}(A, d_2) = \dfrac{1}{2\sqrt{10}}$.

4. $x - 1 = (1 - x)^3 \Rightarrow (x - 1)(x^2 - 2x + 2) = 0 \Rightarrow x = 1$.

5. $C(0, 1)$; $\mathrm{d}(C, d) = \dfrac{7}{\sqrt{13}}$.

6. $D(0, 2)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) Calculați $A^2 = O_3$; $B^2 - 2B = -I_3$;

b) $\det B = 1 \neq 0 \Rightarrow B$ este inversabilă; $B^{-1} = 2I_3 - B$;

c) $B^n = nB - (n-1)I_3$.

2. a) Se verifică axiomele grupului abelian;

b) $f(x \circ y) = \dfrac{3 + x \circ y}{3 - x \circ y} = \dfrac{9 + xy + 3x + 3y}{9 + xy - 3x - 3y} = f(x) \cdot f(y)$;

c) Rezolvați ecuația $x \circ x \circ x = \dfrac{7}{3} \Leftrightarrow \dfrac{x^3 + 27x}{3x^2 + 9} = \dfrac{7}{3} \Rightarrow x^3 - 7x^2 + 27x - 21 = 0 \Rightarrow x = 1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $\forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 \le \sin x \le 1$ şi $e^{-x} > 0 \Rightarrow -e^{-x} \le f(x) \le e^{-x}$;

b) Cu teorema cleştelui $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$;

c) $f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$. Pentru $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right]$, f este crescătoare. Pentru $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$, f este descrescătoare.

2. a) $I_1 = \dfrac{2}{3}$; $I_2 = \dfrac{8}{15}$;

b) $x \in [0, 1] \Rightarrow x^2 \in [0, 1] \Rightarrow 1 - x^2 \in [0, 1] \Rightarrow I_n \geq 0, \forall\, n \geq 2$;
c) Se folosește integrarea prin părți.

TESTUL 13

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $x > 0; x + 1 > 0 \Rightarrow x \in (0, \infty)$; $\log_2 2 + \log_2 x = \log_2(x + 1) \Rightarrow 2x = x + 1 \Rightarrow x = 1 \in (0, \infty)$.

2. $1+\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1+\frac{1}{i}=1-i$.

3. 1.

4. $x \in \mathbb{N} \Rightarrow 2x + 1 \leq 9 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

5. $\cos 4x - \cos 2x = 0 \Rightarrow -2 \sin 3x \sin x = 0 \Rightarrow x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$.

6. $AB = 5 \Rightarrow A_\Delta = \frac{25\sqrt{3}}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $AB - BA = O_3$;
b) $AB = O_3$, $BA = O_3$; se demonstrează prin inducție;
c) $A^n + B^n = (A + B)^n$; $(A + B)^2 = 9I_3$.

2. a) $x \circ y = 2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$;
c) $x \circ x \circ x = 15 \Rightarrow 4\left(x-\frac{3}{2}\right)^3+\frac{3}{2}=15 \Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8} \Rightarrow x=3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$;
b) $y = x$ asimptotă oblică spre $-\infty$;
c) $f'(x) = 1 - e^x$; pentru $x \leq 0$, f este crescătoare; pentru $x \geq 0$, f este descrescătoare.

2. a) Calculați $I + J = \int_0^{\ln 2} \frac{2e^x+2}{e^x+1}dx$, $J = 2x\Big|_0^{\ln 2} = 2\ln 2$;
b) $I - J - 2K = 0$;
c) $0 < \frac{1}{e^x+1} < 1 \Rightarrow 0 < J < \ln 2 < 1 \Rightarrow 0 < J < 1$;
$I = \int_0^{\ln 2}\left(1+\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx > \int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx = \ln(e^x+1)\Big|_0^{\ln 2} = \ln(2+1)-\ln(1+1)=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

TESTUL 14

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $x^2 - 4 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$.

2. Partea imaginară = $i\sqrt{3}$.

3. Partea întreagă = 2.

4. $x - 4 = (4 - x)^3 \Rightarrow x = 4$.

5. Inecuația devine $2 \sin x \cos x \geq 1 \Rightarrow \sin 2x \geq 1$; $\sin 2x \in [-1, 1\} \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

6. $A \in Oy \Rightarrow A(0, y)$; $AB = 4 \Rightarrow 4 + (3 - y)^2 = 16 \Rightarrow y_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = O_3$, $\det(I_3 + xA) = 1$;

b) $(I_3 + A)(I_3 - A + A^2) = I_3$;

c) Folosind punctul b) $\Rightarrow (A^2 - A + I_3)^{-1} = I_3 + A$.

2. a) $e = 1 - i$; $x' = \dfrac{2 - ix}{x + i}$, $x \in \mathbb{C} - \{-i\}$;

b) $a = -i$;

c) $x \circ x \circ x = -9i \Leftrightarrow (x + i)^3 = (2i)^3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$;

b) $f'(x) = \dfrac{-e^x}{1 - e^{-x}} < 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare;

c) d_1: $y - \ln(1 + e) = -\dfrac{e}{1+e}(x + 1)$; d_2: $y - \ln(1 + e) + 1 = -\dfrac{1}{1+e}(x - 1)$; $d_1 \cap d_2 = A(0, \ln 2)$.

2. a) $f'(x) = e^{-x+1}(a - ax - b)$; $f'(1) = 1 \Rightarrow b = -1$; $f'(1{,}5) = 0 \Rightarrow a = 2$;

b) Se arată că $F'(x) = f(x)$;

c) Se rezolvă utilizând integrarea prin părți $\Rightarrow \int_1^4 f(x)\,dx = 3 - 9e^{-3}$.

TESTUL 15

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Numărul total de termeni = 2011; $T_{k+1} = C_{2010}^k \sqrt{5}^k \in \mathbb{Q} \Rightarrow k \in \mathcal{M}_2$, $k \leq 2010 \Rightarrow$ numărul cazurilor favorabile = 1006 $\Rightarrow p = \dfrac{1006}{2011}$.

2. $x \in \{\hat{1}, \hat{3}\}$.

3. $P = \dfrac{648}{900}$.

4. $\log_3(3^5) - \log_2(2^{10}) = 5 - 10 = -5 \in \mathbb{Z}$.

5. $A\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

6. $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=4\sqrt{6}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&0&0\\0&x&0\end{pmatrix}$; $A^3=x\cdot I_3$;

b) $A^{3n}=(A^3)^n=(xI_3)^n=x^n\cdot I_3^n=x^n\cdot I_3$. Analog $A^{3n+1}=x^n\cdot A$ şi $A^{3n+2}=x^n\cdot A^2$;

c) $B_n=A^n\left(I_3+A+A^2\right)\Rightarrow \det B_n=(\det A)^n\cdot\det\left(I_3+A+A^2\right)$.

2. a) $x, y\in G\Rightarrow x>-1, y>-1\Rightarrow x+1>0, y+1>0\Rightarrow (x+1)(y+1)>0\Rightarrow xy+x+y>-1$ $\Rightarrow x*y\in G$;

b) $e=0\in G$; $x'=-\dfrac{x}{x+1}\in G$;

c) $\underbrace{x*x*...*x}_{\text{de 2018 ori}}=(x+1)^{2018}-1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $g'(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x}$; folosind tabelul de monotonie al funcției $g\Rightarrow g(x)\geq 2$, $\forall\ x\geq\dfrac{1}{4}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$;

c) $y=x-2$ asimptota oblică spre $+\infty$.

2. a) $f'(x)=\dfrac{3-x^2}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}^*$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+2x-3}{x(x+1)}=-1$;

c) $\int_1^9 f(x)\,dx=\int_1^9\left(-x+2-\dfrac{3}{x}\right)dx=-24-6\ln 3$.

TESTUL 16

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $a_4=\dfrac{a_2+a_6}{2}\Rightarrow a_6=15$.

2. $|(1+i)^{2008}|=|1+i|^{2008}=\sqrt{2}^{2008}=2^{1004}$.

3. $x-1>0\Rightarrow x>1$; $x=10\in(1,\infty)$.

4. $2^n=2^3=8$.

5. $BC=\sqrt{10}\Rightarrow$ linia mijlocie $=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

6. $\sin^2 120°+\cos^2 60°-1=\sin^2 60°+\cos^2 60°-1=1-1=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$ tr $X = a + d$; tr $X^2 = a^2 + 2bc + d^2$; det $X = ad - bc$; se verifică relația;

b) Se foloseşte punctul a) sau se demonstrează prin inducție că $A^n = 7^{n-1} \cdot A \Rightarrow$ tr $A^n = 7^n$;

c) $A + A^2 + \ldots + A^n = \dfrac{7^n - 1}{6} \cdot A \Rightarrow \text{tr}(A + A^2 + \ldots + A^n) = \dfrac{7^{n+1} - 1}{6}$;

2. a) $f(\{x\}) = \{x\} + [\{x\}] = \{x\} + 0 = \{x\}$;

b) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x + 3[x]$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$. Din teorema lui Lagrange rezultă că există $c \in (n, n + 1)$ astfel încât $f'(\text{c}) = \dfrac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n}$; din $n < c < n + 1 \Rightarrow \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{n} \Rightarrow \dfrac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \dfrac{1}{n}$;

b) Folosind punctul a) $\Rightarrow a_{n+1} - a_n \ \dfrac{1}{n} - \ln(n+1) - \ln n \ < 0$;

c) Se foloseşte a doua inegalitate de la punctul a).

2. a) $I_1 + I_2 = \ln 2 + \dfrac{\pi}{4}$;

b) $x \in [0, 1] \Rightarrow x^n \geq x^{n+1} \Rightarrow x^n + 1 \geq x^{n+1} + 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x^n + 1} \leq \dfrac{1}{x^{n+1} + 1} \overset{\text{T. monotoniei}}{\Rightarrow} I_n < I_{n+1}$.

TESTUL 17

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $\dfrac{n!}{2!(n-2)!} = 10 \Rightarrow n = 5$.

2. $\log_2\left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2010}{2011}\right) = \log_2 \dfrac{1}{2011} = -\log_2 2011$.

3. $p = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

4. $x \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \Rightarrow$ soluția $x = -\dfrac{5}{2}$.

5. 1.

6. $2 \cdot a + 5 \cdot 4 = 0 \Rightarrow a = -10$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $\det(A(2)) = 9$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$;

c) det $A(x) = 2x^2 + 1 \Rightarrow$ ecuația $= 2x^2 + 1 = 0$ nu are soluții reale.

2. a) Calcul direct;

b) $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{\text{de 2010 ori}} = -4 \Rightarrow (x+4)^{2010} - 4 = -4 \Rightarrow x = -4$;

c) Pentru $x = y = \sqrt{6} - 4 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow x \circ y = 2 \notin \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ nu e parte stabilă.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$; f este descrescătoare;

c) 2010.

2. a) Pentru $x \in (-\infty, 1] \Rightarrow f(x) = x^2 - 3x + 1$; $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 2x + C$;

b) $\int_{-3}^{3} f(x)dx = \int_{-3}^{1}(x^2 - 3x + 2)dx + \int_{1}^{2}(-x^2 + 3x - 2)dx + \int_{2}^{3}(x^2 - 3x + 2)dx = \dfrac{91}{3}$;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$.

TESTUL 18

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $(x + 5) \cdot 2 = x + 1 + 7 \Rightarrow x = -2$.

2. $f(2) = 3 \Rightarrow m = 1$.

3. $2x + 1 > 0 \Rightarrow x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \infty\right)$; $\sqrt{2x+1} = 3 \Rightarrow x = 4 \in \left(-\dfrac{1}{2}, \infty\right)$.

4. $p = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$.

5. $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$; analog pentru $y_G \Rightarrow \left(0, \dfrac{11}{3}\right)$.

6. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $\det A = 0$; toți minorii de ordinul 2 sunt zero $\Rightarrow$ rang $(A) = 1$;

b) $XY = A \Rightarrow S = O_3$;

c) $\det B = 11 \neq 0 \Rightarrow B$ inversabilă; $B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B = I_3$.

2. a) $e = 6$;

b) Se arată că pentru $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x * y) * z = x * (y * z) = (x-5)(y-5) + 5$;

c) $(x-5)^3 + 5 = x \Rightarrow x \in \{4, 5, 6\}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x) = 2010x^{2009} + 2010^x \ln 2010$;

b) $f''(x) = 2010 \cdot 2009 \cdot x^{2008} + 2010^x \cdot \ln^2 2010 > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este convexă;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = f''(0) = \ln^2 2010$.

2. a) $e^x + 2\ln x + C$;

b) $A = \int_1^2 x\left(e^x + \frac{2}{x}\right) dx = \int_1^2 (xe^x + 2)\, dx = e^2 + 2$;

c) $\int_1^2 (e^x \cdot x^2 + 2x)\, dx = \int_1^2 x^2 \cdot e^x dx + x^2\Big|_1^2$ (se aplică de două ori integrarea prin părți).

TESTUL 19

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $x \neq 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0 \Rightarrow x_1x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2}$.

2. $(2x - 1) - 2(2 - x) = 3 \Rightarrow x$.

3. $3^{2x} \cdot 3 + 8 \cdot 3^x - 3 = 0$; notăm $3^x = a$, $a > 0 \Rightarrow 3a^2 + 8a - 3 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$; $a_2 = -3$ (nu convine); $3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -1$.

4. $p = \frac{5}{55} = \frac{1}{11}$.

5. $M(-4, 3) \Rightarrow OM = 5$.

6. $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6} = 0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A + B = \begin{pmatrix} a+1 & 1+a \\ 1+a & a+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A + B) = 0$;

b) $AB = BA = \begin{pmatrix} 2a & a^2+1 \\ a^2+1 & 2a \end{pmatrix}$;

c) A inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow a^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow a \notin \{1, -1\} \Rightarrow a \in \mathbb{Z} - \{-1, 1\}$.

2. a) Calcul direct;

b) $f = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$; pentru $x = -1 \Rightarrow (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) = 2 + 2a \Rightarrow a = 0$;

c) $f = (x - 1)(x^2 + 1)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) Calcul direct;

b) $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, $\forall x > 0 \Rightarrow f$ este concavă;

c) Din tabelul de variație al lui $f \Rightarrow f(x) \leq -1$, $\forall x \geq 1 \Rightarrow f(x^2) \leq -1 \Rightarrow \ln x^2 - x^2 \leq -1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2\ln x \leq x^2 - 1$.

2. a) $a = 1$, $b = -1$;

b) $g(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow A = 1$;

c) $h(x) = x^2 + x \Rightarrow V = \frac{481\pi}{30}$.

TESTUL 20

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $1-2\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}=3 \in \mathbb{N}$.

2. $G_f \cap Ox = A(2, 0)$; $G_f \cap Oy = B(0, 4)$; $AB = 2\sqrt{5}$.

3. $2x - 1 > 0 \Rightarrow x \in \left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$; $2x - 1 = 8 \Rightarrow x = \dfrac{9}{2} \in \left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$.

4. $A_7^2 = 42$.

5. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = 5$.

6. $A = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = 4$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A_0(1, -2)$; $A_1(4, 0)$; A_0A_1: $2x - 3y - 8 = 0$;
b) $2(3n + 1) - 3(2n - 2) - 8 = 0 \Rightarrow A_n \in A_0A_1$;
c) $A_nA_m = A_0A_1 \cap Ox = B(4, 0)$.

2. a) Calcul direct;
b) $x \circ x = 30 \Rightarrow (x - 5)^2 + 5 = 30 \Rightarrow x \in \{0, 10\}$;
c) $x, y \in (5, \infty) \Rightarrow x - 5 > 0, y - 5 > 0 \Rightarrow (x - 5)(y - 5) + 5 > 5 \Rightarrow x \circ y \in (5, \infty)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$;
b) $y = 0$;
c) Se alcătuieşte tabelul de variație al funcției f.

2. a) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - 3\ln x + 1$;
b) $g(x) = x \Rightarrow V = \dfrac{7\pi}{3}$;
c) $\int_1^e \left(x \cdot \ln x - \dfrac{2}{x} \cdot \ln x\right) dx = \left[\dfrac{x^2}{2} \cdot \ln x - \dfrac{x^2}{4} - 2 \cdot \dfrac{(\ln x)^2}{2}\right]\Bigg|_1^e = \dfrac{e^2 - 3}{4}$.

TESTUL 21

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $z = -1 + i \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = -1$.

2. $\Delta = 0 \Rightarrow m \in \left\{-1, \dfrac{7}{9}\right\}$.

3. $\log_2(9-7) - 3\log_3 3 = 1 - 3 = -2$.

4. $n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow n = 4$.

5. $y = -x + 2$.

6. Se foloseşte teorema cosinusului.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $\begin{vmatrix} m & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2m-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5m - 15$;

b) Sistemul are soluție unică $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} - \{3\}$;

c) $m = \dfrac{20}{13}$.

2. a) $f = X^3 + X^2 + X + 1$; $f = 0 \Rightarrow (x + 1)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = i, x_3 = -i$;

b) $S_1^2 - S_2 = 9 \Rightarrow 1 - 2a = 9 \Rightarrow a = -4$;

c) $f(2) = 0, f(-2) = 0 \Rightarrow a = b = -4$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$;

b) $y = 2$ asimptotă orizontală spre $-\infty$;

c) Din tabelul de monotonie al lui f rezultă inegalitaatea cerută.

2. a) $\int_0^1 \left(\sqrt{x}+1\right) dx = \dfrac{5}{3}$;

b) F primitiva lui $f \Rightarrow F'(x) = f(x) \geq 0, \forall\, x \geq 0 \Rightarrow F$ crescătoare pe $[0, \infty)$;

c) Arătați că $\int_1^2 \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \left(1 + 2017 \cdot x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \left(x + 2017 \cdot 2\sqrt{x}\right)\Big|_1^2 = 4034\sqrt{2} - 4033$.

TESTUL 22

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $a = \left(3\sqrt{2}-4\right) + \left(5-3\sqrt{2}\right) = 1 \in \mathbb{N}$.

2. $f(g(2017)) = f(1) = 1$.

3. $x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 = 1 - 2x + x^2 \Rightarrow x = 0$.

4. Prețul inițial al obiectului este 500 lei.

5. $|\vec{v}| = |2 \cdot \overrightarrow{CB}| = 2 \cdot 25 = 50$.

6. $\sin^2 57° + \cos^2 48° + \cos^2 57° + \sin^2 48° = 2$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A(a) \cdot A(b) = A(a + b + 1) \in M$.

b) $A(a) \in M$; $A(a) \cdot B = A(-1) \Rightarrow B = A(-a - 2)$.

c) Se reduce la $a + b + c = 13$, $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a \leq b \leq c$.

2. a) Calcul direct;

b) $x^2 - 6x - 16 \leq 0, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1, 0, 1, \dots, 8\}$;

c) $x \circ 3 = 3 \circ x = 3$; rezultat final 3.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) f continuă pe $[0, \infty) \Rightarrow f$ continuă în $x = 1 \Rightarrow l_s(1) = l_d(1) \Rightarrow a = 4$.

b) Pentru $x \in [0, 1]$, f este strict crescătoare; pentru $x \in [1, \infty)$, $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2} < 0 \Rightarrow f$ este strict descrescătoare;

c) Pentru $x \in (0, 1]$, din tabelul de monotonie al lui $f \Rightarrow 4 < f(x) \le 5$ şi $\dfrac{1}{x} > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 < f\left(\dfrac{1}{x}\right) \le 5 \Rightarrow 7 < f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) \le 5$. Analog pentru $x \ge 1$.

2. a) $f'(x) = 3x^2 - 3$; din tabelul de variaţie al lui $f \Rightarrow -2 \le f(x) \le 2$, $\forall x \in [0, 2] \Rightarrow |f(x)| \le 2$;
b) -2;

c) $A = \int_{\sqrt{3}}^{2} \dfrac{x^3 - 3x}{x^3} dx = \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(1 - \dfrac{3}{x^2}\right) dx = \dfrac{15 - 8\sqrt{3}}{3}$.

TESTUL 23

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_3 = a_6 = \ldots = a_{3k} = 4$, $a_4 = a_7 = \ldots = a_{3k+1} = 5$, $a_5 = a_8 = \ldots = a_{3k+2} = 7$, $a_{21} = a_{3 \cdot 7} = 4$.

2. $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow f$ este pară.

3. $x \in [-1, 1]$; $1 - x^2 = 1 - 2x + x^2 \Rightarrow x \in \{0, 1\}$.

4. 200 lei este preţul iniţial al obiectului.

5. $|\vec{v}| = |2 \cdot \overline{AB}| = 20$.

6. Cu teorema cosinusului $\Rightarrow a = 2\sqrt{19}$, $S = \dfrac{b \cdot c \cdot \sin\sphericalangle A}{2} = 6\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A^2 = -I_2$; $A^3 = -A$;
b) $G = \{A, -I_2, -A, I_2\} \Rightarrow G$ are 4 elemente;
c) $B_{2017} = I_2 + A \Rightarrow n = 1$.

2. a) $A = f(2) = 6 + a$;
b) $B = S_1^2 - 2S_2 = -1$;
c) $B < 0 \Rightarrow f$ nu are toate rădăcinile reale, $\forall a \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e \cdot f(x) - 2}{x - 1} \overset{\text{l'Hospital}}{=} f'(1) = -\dfrac{1}{e}$;
b) $y = 0$ asimptotă orizontală spre $+\infty$;
c) Din tabelul de variaţie al lui $f \Rightarrow f(x) \ge 0 \Rightarrow x \in [-1, \infty)$.

2. a) $I_1 = \int_0^1 \dfrac{x}{x^2 + 1} dx = \dfrac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \dfrac{1}{2} \ln 2$;

b) $I_2 - I_4 = \int_0^1 \dfrac{x^2 - x^4}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \left(-x^2 + 2 - \dfrac{2}{x^2 + 1}\right) dx = \dfrac{5}{3} - \dfrac{\pi}{2}$;

c) $I_n + I_{n-2} = \int_0^1 \dfrac{x^n + x^{n-2}}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 x^{n-2} dx = \dfrac{x^{n-1}}{n - 1} \Big|_0^1 = \dfrac{1}{n - 1}$.

TESTUL 24

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 5 = 95$.

2. $m(1 - x) + n + m(2 + 2x) = 2x + 8 \Rightarrow m = 2, n = 1$.

3. $x \in \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$; $2x + 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x = 0 \in \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$.

4. $\begin{cases} 3n-2 \mid 2n+1 \\ 3n-2 \mid 3n-2 \end{cases} \Rightarrow 3n - 2 \mid 3(2n + 1) - 2(3n - 2) \Rightarrow 3n - 2 \mid 7 \Rightarrow 3n - 2 \in D_7 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \{1, 3\} \Rightarrow \text{card } A = 2$.

5. ΔABC echilateral $\Rightarrow H\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

6. ΔABC dreptunghic isoscel; $R = 4 \Rightarrow BC = 8$; $AB = AC = 4\sqrt{2}$; $\mathscr{P}_{\Delta ABC} = 8\left(\sqrt{2}+1\right)$;

$\mathscr{A}_{\Delta ABC} = 16$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A^2 = A$; $B^2 = B$; $A^2 + B^2 = A + B = I_2$; $AB = BA = O_2$;

b) $X(a) \cdot X(b) = (aA + B)(bA + B) = abA^2 + aAB + bBA + B^2 = abA + aO_2 + bO_2 + B =$
$= abA + B \in M$.

c) $(X(a))^n = X(a^n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; $(X(2))^{2017} - 2^{2017}A = 2^{2017}A + B - 2^{2017}A = B$.

2. a) $f = (X + 1)(X^2 + 1) \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -i, x_3 = i \Rightarrow A = -1$;

b) $q = X$; $r = 1$; $g(x_1) \cdot g(x_2) \cdot g(x_3) = 1$;

c) $g(y_1) = 0 \Rightarrow y_1^2 + y_1 + 1 = 0 \Rightarrow f(y_1) = 1$; analog $f(y_2) = 1 \Rightarrow f(y_1) + f(y_2) = 2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1}$, $x \in (-1, \infty)$; $y = -x$ este ecuația tangentei la G_f în $x = 0$;

b) $f''(x) = \frac{x+3}{(x+1)^2} > 0$, $\forall\, x \in (-1, \infty) \Rightarrow f$ este convexă;

c) Din tabelul de variație al lui f.

2. a) $I_1 = \int_0^1 (1 - x^2)\, dx = \frac{2}{3}$;

b) $x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \le (1 - x^2)^n \le 1 \Rightarrow 0 \le I_n \le \int_0^1 1\, dx \Rightarrow 0 \le I_n \le 1$;

c) $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\, dx = x(1-x^2)^n \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot n(1-x^2)^{n-1}(-2x)\, dx = 2nI_1 = \int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1}\, dx =$

$= -2n\int_0^1 (1 - x^2 - 1)(1-x^2)^{n-1}\, dx = -2n\int_0^1 (1-x^2)^n - (1-x^2)^{n-1}\, dx = 2nI_n + 2nI_{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$.

TESTUL 25

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $|2-\sqrt{5}|+|\sqrt{5}-3|=1\in\mathbb{N}$.

2. $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(18)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{18}{20}=\frac{2}{19\cdot 20}=\frac{1}{190}>\frac{1}{200}$.

3. $2^{2x-2}=2^3\Rightarrow x=\frac{5}{2}$.

4. $-3\le 2x-1\le 3$ şi $x\in\mathbb{Z}^*\Rightarrow x\in\{-1, 1, 2\}\Rightarrow$ cadr $A=3$.

5. $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\Rightarrow x_C=4$; $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\Rightarrow y_C=4$; $C(4, 4)$.

6. $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}\Rightarrow AC=4\sqrt{3}$; $A_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}=4\left(3+\sqrt{3}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $\Delta(x, -x, 1)=2x^2$;

b) $\Delta(x, y, z)=(1+x)(1+y)(1+z)-x-y-z-1$; se verifică relația dată;

c) $x=0$; $y=1$; $z=107$.

2. a) Calcul direct;

b) $x=3$; $e=2$; 3 nu este simetrizabil;

c) $x\circ x\circ x=x\Leftrightarrow(x-3)^3+3=x\Rightarrow x\in\{2, 3, 4\}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x)=\frac{x}{2(x+2)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$;

b) $x=-2$ asimptotă verticală la dreapta;

c) Din tabelul de variație a lui $f\Rightarrow f(x)\in\left[-\ln 2, -\frac{1}{2}\right]$, $\forall\, x\in[-1, 0]\Rightarrow$

$\Rightarrow|f(x)|\in\left[\frac{1}{2}, \ln 2\right]$, $\forall\, x\in[-1, 0]$.

2. a) $I_1=\int_0^1 xe^{-x}\,dx=-e^{-x}(x+1)\Big|_0^1=1-\frac{2}{e}$;

b) $I_n=\int_0^1 x^n\cdot(-e^{-x})'\,dx=-x^ne^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 n\cdot x^{n-1}\cdot e^{-x}\,dx=-\frac{1}{e}+nI_{n-1}$;

c) Se foloseşte inegalitatea din enunț şi teorema de monotonie.

TESTUL 26

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $c<b<a<d$.

2. $f(f(f(x)))=1\Rightarrow 2f(f(x))-1=1\Leftrightarrow f(f(x))=1\Rightarrow 2f(x)-2=1\Leftrightarrow f(x)=1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x-1=1\Leftrightarrow x=1$.

3. $3^{2x+2}=3^{3x-3}\Rightarrow x=5$.

4. Numerele sunt: 997, 979, 799, 988, 898, 889.

5. $AC \cap BD = \{Q\} \Rightarrow Q$ – mijlocul lui AC şi al lui $BD \Rightarrow Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow D(2, 4)$.

6. $S = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2} \Rightarrow B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow AC = 3\sqrt{5}$; $R = \frac{AC}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; $r = \frac{S}{p} = \frac{3(3-\sqrt{5})}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $\det(A(x)) = (x^3 - 1)^2$;

b) $A(x)$ inversabilă $\Leftrightarrow \det A(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\}$;

c) $x = 1$.

2. a) $f(1) = 0 \Rightarrow a = 1$;

b) $S_1^2 - 2S_2 = 7$;

c) $f(x_i) = 0,\ i = \overline{1, 3} \Rightarrow x_i^3 + x_i^3 - 3x_i + a = 0$, $\forall\ i = \overline{1, 3}$. Adunând relațiile pentru $i = \overline{1, 3}$ rezultă relația din enunț.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $y = 0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$ şi $+\infty$; $x = 0$ asimptotă verticală bilaterală;

b) Pentru $x \in (0, \infty) \Rightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x}$; $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$; $f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$.

Pentru $x \in \left(0, \sqrt{e^3}\right]$, f concavă. Pentru $x \in \left[\sqrt{e^3}, \infty\right)$, f convexă;

c) Din tabelul de variație a lui $f \Rightarrow f$ crescătoare $\forall\ x \in (0, e] \Rightarrow f\left(\frac{e}{2}\right) < f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ inegalitatea din enunț.

2. a) F este derivabilă şi $F'(x) = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$;

b) $A = \int_0^1 f(x)\,dx = F(x)\Big|_0^1 = 2e - 1$;

c) Fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, G primitiva lui $F \Rightarrow G'(x) = F(x)$; $G''(x) = F'(x) = f(x) > 0$, $\forall\ x \in [0, \infty) \Rightarrow$
$\Rightarrow F$ este convexă.

TESTUL 27

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $|z| = |1 - i| \cdot |1 + 2i| = \sqrt{10}$.

2. $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = 2 - x$; $f^{-1}(-4) + f^{-1}(4) = 4$.

3. $2^x = a$, $a > 0 \Rightarrow a^2 + 2a - 8 = 0 \Rightarrow a = -4$ nu este soluție; $a = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$.

4. $\overline{abc}$, $a \neq 0$; $a + b + c = 5 \Rightarrow 55$ numere.

5. $\frac{2a-1}{-3} = \frac{-2}{4-a} \Rightarrow a \in \left\{2, \frac{5}{2}\right\}$.

6. $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $A^2 = A \Rightarrow A^2 - A = O_2$; $A^* = \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 1+i & i \end{pmatrix}$; $A^* \cdot A^* = A^* \Rightarrow A^* \cdot A^* - A^* = O_2$;

b) $B = X(a) \in G$; $C = X(b) \in G$, $a, b > 0$; se arată că $A \cdot A^* = A^* \cdot A^* = O_2$;
$B \cdot C = X(a) \cdot X(b) = (A + aA^*)(A + bA^*) = A^2 + aA^*A + bAA^* + abA^* \cdot A^* = A + abA^* \in G$, $ab > 0$;

c) Din punctul b) rezulă $X(1) = A + A^* = I_2$.

2. a) $f(2) = 0$;

b) $S_1^2 - 2S_2 = 14 \Rightarrow a = \pm 3$;

c) $f = X^3 - 7X + 6 \Rightarrow f = (X-1)(X-2)(X+3)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ (folosind regula lui l'Hospital);

b) Din tabelul de variație a lui f, pentru $x \geq 0$, f este crescătoare $\Rightarrow \forall\, x \in \left[\dfrac{1}{2}, \infty\right)$, $f(x) \geq$ $\geq f\left(\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow$ inegalitatea din enunț;

c) $0 < e < \pi \Rightarrow f(e) < f(\pi) \Rightarrow$ inegalitatea din enunț.

2. a) Se obține din tabelul de variație a lui $f_n(x)$ pentru $x \in [0, 1]$;

b) $I_1 = \int_0^1 xe^{1-x}\,dx = e - 2$;

c) Folosind integrarea prin părți se obține egalitatea cerută.

TESTUL 28

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $b_1, q \in \mathbb{Z}$, $b_1 \cdot q^4 - b_1 \cdot q = 14 \Rightarrow b_1 \cdot q(q^3 - 1) = 14 \Rightarrow q = 2$; $b_1 = 1$.

2. $f(x) = 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$; $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3\left(\dfrac{1}{x} + x\right)$; $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$, $\forall\, x > 0 \Rightarrow f(x) \cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq 36$.

3. $x > 0$; pentru $\lg x = a$ ecuația devine $a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow a \in \{1, 3\} \Rightarrow x \in \{10, 1000\}$.

4. $P_4 - P_3 = 18$.

5. Fie d_1 perpendiculara din A pe d; d_1: $y = -\dfrac{1}{2}(x-2)$; $d_1 \cap d = B\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$; simetricul lui A față de d este punctul C astfel încât B este mijlocul lui $AC \Rightarrow C\left(-\dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$.

6. $\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$, $\alpha \in \{1°, \ldots, 44°\} \Rightarrow P = 1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) Se verifică faptul că $B \cdot B^t = I_2$;

b) $A \in G \Rightarrow A \cdot A^t = I_2 \Rightarrow \det(A \cdot A^t) = \det I_2 \Rightarrow \det A \cdot \det A^t = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow A$ este inversabilă;

c) $A, C \in G \Rightarrow A \cdot A^t = I_2$, $C \cdot C^t = I_2$, $(AC) \cdot (AC)^t = (AC) \cdot (C^tA^t) \cdot A^t = A \cdot I_2 \cdot A^t = A \cdot A^t =$ $= I_2 \Rightarrow AC \in G$.

2. a) Modul I. $f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3) \Rightarrow f(-1) = -A \Rightarrow A - 2$;
Modul II. Desfiinţăm parantezele şi folosim relaţiile lui Viète;
b) Din $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x - x_1} + \dfrac{1}{x - x_2} + \dfrac{1}{x - x_3}$ pentru $x = 1$ se obţine $B = -3$;
c) Folosind şirul lui Rolle $\Rightarrow f = 0$ are o singură soluţie reală, $x_1 \in I$; $I = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right]$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x) = \dfrac{e^{x^2-x}(2x^2 - x - 1)}{x^2}$; înlocuind se demonstrează relaţia, $\forall$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}^*$;
b) $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup [1, \infty)$, f este crescătoare; $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right) \cup (0, 1]$, f este descrescătoare;
c) Din tabelul de variaţie a lui f rezultă că ecuaţia $f(x) = \dfrac{e^2}{2}$ are două soluţii reale, $x_1 \in$ $\in (0, 1)$, $x_2 \in (1, \infty)$.

2. a) F primitiva lui f, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow F'(x) = f(x)$; $F''(x) = f'(x) = 1 + \dfrac{4}{1 + x^2} > 0$, $\forall$ $x \in \mathbb{R} \Rightarrow F$ este convexă;
b) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + 4\operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)\Big|_1^{\sqrt{3}} + 4 \cdot \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{7\pi^2}{72}$;
c) $A = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} + 2\pi - 2\ln 2$.

TESTUL 29

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $(5x - 4)^2 = (2x - 1)(4x + 4) \Rightarrow x_1 = 2$; $x_2 = \dfrac{10}{17}$.

2. $2(x_1 + x_2) + 3x_1x_2 = 17 \Rightarrow 4m + 3(3m - 3) = 17 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

3. $x \in \mathbb{R}^*$; $x = \pm 4$.

4. $A_4^3 = 24$.

5. $M(1, 3)$ mijlocul lui AB; OM: $3x - y = 0$.

6. $\cos x = \dfrac{3}{5}$, $\sin y = \dfrac{5}{13} \Rightarrow \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y = \dfrac{56}{65}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $AB = O_2$;
b) $\det(A + I_2) = 1 \neq 0 \Rightarrow A + I_2$ este inversabilă şi $(A + I_2)^{-1} = I_2 - B$;
c) $(-I_2 - A)^{-1} = A - I_2$.

2. a) Calcul direct;

b) $x \circ 1 = 1 \circ x = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

c) $x' = \dfrac{x}{2x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$; $x' \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0, 1\}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x) = \pi - 2\operatorname{arctg} x - \dfrac{2x}{1+x^2}$; $f''(x) = \dfrac{-4}{(1+x^2)^2} < 0 \Rightarrow f$ este concavă pe $(0, \infty)$;

b) $f''(x) < 0$, $\forall\, x > 0 \Rightarrow f'(x)$ descrescătoare pe $(0, \infty)$ şi $\operatorname{Im} f' = (0, \pi) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crescătoare pe $(0, \infty)$;$f'(x) f'(x)$

c) $f'(1) = \dfrac{\pi}{2} - 1$; $y = \left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)x + 1$.

2. a) $f'(x) = g(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este o primitivă a lui g;

b) $A = \int_0^1 g(x)\, dx = f(x)\Big|_0^1 = 3e$;

c) $\int_0^1 \dfrac{e^x(2x+2)}{x+1}\, dx = \int_0^1 e^x \cdot 2\, dx = 2e^x\Big|_0^1 = 2e - 2$.

TESTUL 30

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $x = 1 \in \mathbb{N}$.

2. $V(1, 3) \in G_f \Rightarrow -\dfrac{b}{2a} = 1 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1; f(1) = 3 \Rightarrow n = 4$.

3. $x \in \mathbb{R}$; $4^x + 2^x + 3 = 9$; $2^x = a$, $a > 0 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Rightarrow a = -3$ nu este soluţie; $a = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$.

4. $A = \{1, 2, a, b\}$, ude $a, b \in \{3, 4, \ldots, 9\} \Rightarrow$ numărul submulţimilor $= C_7^2 = 21$.

6. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A$ şi analoagele lor; folosind teorema cosinusului relaţia din enunţ este egală cu $BC^2 = 25$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; din $AC = CA \Rightarrow c = -b$; $d = a$;

b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G$; $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in G \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} \in G$;

$AB = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad+bc) & ac - bd \end{pmatrix} \in G$;

c) $X \in G \Rightarrow X^2 = -I_2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = -1$ şi $2ab = 0$, cu soluţiile $a = 0$, $b = \pm 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) $f(-\hat{4}) = f(\hat{1}) = \hat{1} + \hat{2}a + \hat{3} + a + \hat{3} = \hat{3}a + \hat{2}$;

b) $f(\hat{3}) = \hat{1} \Rightarrow a = \hat{1}$;

c) $a = \hat{3} \Rightarrow f = x^3 + \hat{4}x + \hat{1} \Rightarrow f(x) = \hat{0} \Rightarrow x = \hat{3}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$; $f(1) + f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 2 - 2 = 2$;

b) $f''(1) = \frac{1}{x^2} > 0$, $\forall\, x > 0 \Rightarrow f$ este convexă;

c) Din tabelul de variație a lui $f \Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right)$, $\forall\, x > 0 \Rightarrow$ inegalitatea din enunț.

2. a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx =$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$;

b) $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1} + x^{n+2}}{x^2+x+1}dx = \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}$;

c) $\forall\, x \in [0, 1]$, $x^2 + x + 1 > 0$, $x^{n+1} \leq x^n$; aplicând teorema de monotonie $\Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$.

TESTUL 31

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $z = \frac{4-x^2}{1+x^2} - \frac{5x}{1+x^2}i \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x \in \{\pm 2\}$.

2. $x + \frac{15}{100}\cdot x = 138 \Rightarrow x = 120$.

3. $x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right) \Rightarrow \log_3(2x-3) = \log_3 x \Rightarrow x = 3$.

4. Numărul submulțimilor lui $A = 2^n = 2^5 = 32$; numărul submulțimilor cu cel mul două elemente este $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 = 16 \Rightarrow p = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

5. $AB \cdot AD \cdot \cos A + BC \cdot CD \cdot \cos(180° - A) = 0$.

6. $B(1, -3)$, $C(-1, 3)$; $A_{\Delta ABC} = 6$; $BC = 2\sqrt{10} \Rightarrow R = \sqrt{10}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a) $x, y \in \mathbb{Z}_3 = \left\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\right\} \Rightarrow$ card $G = 9$;

b) $\begin{pmatrix} (x^2+x)^2 & x^2+x \\ x^2+x & (x^2+x)^2 \end{pmatrix}$;

c) $S = O_2$.

2. a) $5 \circ 2 = 9 \Leftrightarrow 10 + 4 + a = 9 \Rightarrow a = -5$;

b) Pentru $a = 4 \Rightarrow 2(x - 1) + 2(x + 1) + 4 = 0 \Rightarrow x = -1$;

c) Pentru $a = 2$, $x \circ x \circ x \circ x = -40 \Rightarrow (4x + 2) \circ (4x + 2) = -40 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(4x + 2) + 2(4x + 2) + 2 = -40 \Rightarrow x = -\dfrac{25}{8} \notin \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a) $f'(x) = e^x - 1$; rezultă egalitatea din enunț;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{2x} = \dfrac{1}{2}$;

c) $y = -x - 1$ asimptotă oblică spre $-\infty$.

2. a) F este o primitivă a lui $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 4$; $b = 5$;

b) Pentru $a = 4$ şi $b = 3 \Rightarrow \displaystyle\int_0^n \frac{f(x)}{F(x)}dx = \int_0^n \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x + 3}dx = \int_0^n \left(1 + \frac{2x}{x^2 + 2x + 3}\right)dx =$

$= \displaystyle x\Big|_0^n + \int_0^n \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3}dx - \int_0^n \frac{2}{x^2 + 2x + 3}dx = n + \ln\left(\frac{n^2 + 2n + 3}{3}\right) - \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{n + 1}{\sqrt{2}}\right) +$

$+ \dfrac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

c) Analog cu b).