Petre Năchilă
Cătălin-Eugen Năchilă

Exerciții şi probleme pentru cercurile de matematică

Clasa a IV-a

Editura Nomina

Capitolul 1

METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE ARTIMETICĂ

Acest capitol este destinat îndeosebi copiilor şi părinților. Vor fi prezentate cele mai importante metode de rezolvare a problemelor de aritmetică.

Prezentarea metodei este însoțită de exemple de probleme rezolvate, dar şi de probleme propuse.

Toate metodele prezentate sunt folosite şi în capitolele următoare ale cărții: teste de verificare a cunoştințelor, teste grilă, teste pentru concursuri.

1.1. METODA GRAFICĂ (METODA FIGURATIVĂ)

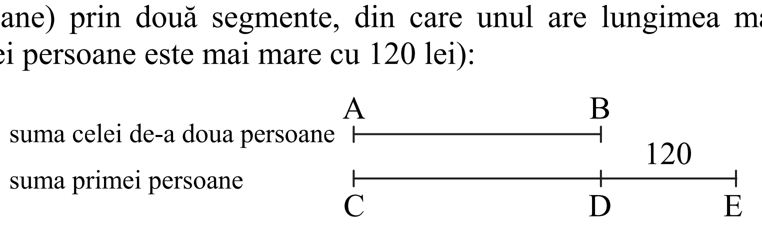
În aplicarea metodei grafice se poate apela la orice categorie de elemente grafice (segmente, cercuri, dreptunghiuri etc.). Folosirea unor anumite elemente grafice este impusă de natura datelor problemei, de accesibilitatea lor, dar mai ales de utilitatea acestora în rezolvarea problemelor.

1.1.a. DETERMINAREA (AFLAREA) NUMERELOR CUNOSCÂND SUMA ȘI DIFERENȚA LOR

1. Două persoane au împreuna 540 lei.

Să se afle ce suma are fiecare persoană, dacă prima persoană are mai mult decât a doua persoană cu 120 lei.

Soluție: Reprezentăm cele două mărimi care intervin (sumele celor două persoane) prin două segmente, din care unul are lungimea mai mare (suma primei persoane este mai mare cu 120 lei):



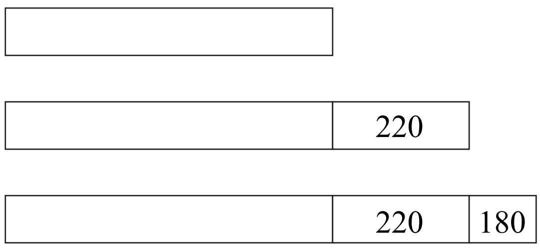
Diferența dintre lungimile segmentelor CE şi AB (adică segmentul DE) reprezintă diferența dintre cele două sume. Segmentul care reprezintă suma pe care o au împreună cele două persoane este format din două segmente de aceeaşi lungime (fiecare segment reprezintă suma celei de-a doua persoane) şi un segment ce reprezintă suma de 120 lei.

Suma celei de-a doua persoane este (540 – 120) : 2 = 210 (lei).
Suma primei persoane este 210 + 120 = 330 (lei) (sau 540 – 210 = 330).

2. Trei grădini au împreună o suprafaţă de 3320 m^2. A treia grădină este cu 220 m^2 mai mare decât a doua, iar prima grădină este cu 180 m^2 mai mare decât a treia.

Să se afle suprafaţa fiecărei grădini.

Soluţie: Suprafeţele celor trei grădini sunt reprezentate astfel:



Suprafaţa celei de-a doua grădini

Suprafaţa celei de-a treia grădini

Suprafaţa primei grădini

Suprafaţa celei de-a doua grădini se determină astfel:
220 + (220 + 180) = 620; (3320 – 620) : 3 = 900 m^2.
A treia grădina are: 900 + 220 = 1120 m^2, iar prima grădină are:
1120 + 180 = 1300 m^2.

OBSERVAŢIE: Dacă se cunosc suma S şi diferenţa D a două numere a şi b, $a \geq b$, atunci avem $a = (S + D) : 2$, $b = (S - D) : 2$.

Într-adevăr, avem $a + b = S$, $a - b = D$, de unde prin adunare, respectiv scădere rezultă că $2 \times a = S + D$, $2 \times b = S - D$.

1.1.b. DETERMINAREA A DOUĂ NUMERE CÂND SE CUNOSC SUMA ŞI RAPORTUL LOR

Prin raportul a două numere naturale a şi b, $b > 0$, înţelegem a : b. Raportul numerelor a şi b (în această ordine) se notează cu $\frac{a}{b}$.

3. Suma a două numere este 224, iar unul din numere este de trei ori mai mare decât celălalt număr.

Capitolul 2

TESTE GRILĂ

TESTUL NR. 1

1. Numărul numerelor naturale pare de două cifre este:
a) 89; b) 90; c) 48; d) 44; e) 45.

2. O fântână are 10 metri. Un melc urcă ziua 3 m şi coboară noaptea 2 m. După câte zile melcul ajunge sus?
a) 10; b) 9; c) 7; d) 8; e) 11.

3. Numărul cifrelor numărului A = 123…891011…2223 este:
a) 23; b) 35; c) 37; d) 38; e) 36.

4. Numărul de apariții a cifrei 2 în scrierea numărului:
B = 123…891011…3233 este:
a) 13; b) 14; c) 12; d) 2; e) 15.

5. Diferența dintre sumele vecinilor numerelor 22 şi 23 este:
a) 2; b) 3; c) 4; d) 5; e) 6.

6. Din numărul 48238719 se taie 4 cifre. Cel mai mic număr ce se poate obține este:
a) 4231; b) 2719; c) 2381; d) 2319; e) 2387.

7. Dacă avem pătratul magic alăturat, atunci x + y este:
a) 11; b) 10; c) 12;
d) 13; e) 9

11	x	9
y	8	a
b	c	5

8. În două coşuri sunt câte 15 pere. Tania a luat din primul coş câteva pere, iar Darius a luat din al doilea coş atâtea pere câte au rămas în primul coş. Numărul de pere rămase în cele două coşuri este:
a) 12; b) 14; c) 15; d) 16; e) 18.

9. Dacă $a + b - c = 20$; $b - c = 8$; $a + b = 28$, atunci $a + c$ este:
a) 20; b) 22; c) 19; d) 18; e) 10.

10. Fie numărul 13254. Fără a le schimba ordinea, adunând cifrele una câte una sau pe grupe de două cifre, diferența dintre suma cea mai mare şi cea mai mică este:
a) 72; b) 78; c) 82; d) 45; e) 0.

TESTUL NR. 2

1. Numărul numerelor pare cuprinse între 5 şi 38 inclusiv este:
a) 15; b) 18; c) 16; d) 17; e) 19.

2. În pătratele din calculul 7 □ 2 □ 3 □ 8 se poate aşeza + sau – şi se obține un număr natural de o cifră. Numărul variantelor posibile este:
a) 3; b) 2; c) 4; d) 1; e) 6.

3. Fiecare din frații dintr-o familie are câte o soră şi doi frați. Numărul copiilor din familie este:
a) 4; b) 3; c) 5; d) 6; e) 2.

4. Numărul numerelor de două cifre având suma cifrelor 8 este:
a) 16; b) 7; c) 6; d) 9; e) 8.

5. Numărul valorilor naturale ale diferenței $\overline{ab} - \overline{ba}$ este:
a) 8; b) 9; c) 10; d) 18; e) 19.

6. Numărul valorilor distincte ale sumei $\overline{ab} + b$ este:
a) 100; b) 50; c) 49; d) 92; e) 99.

7. Pe o tablă sunt desenate dreptunghiuri şi triunghiuri care nu se ating. Dacă sunt 14 vârfuri, atunci numărul figurilor este:
a) 4; b) 3; c) 5; d) 6; e) alt număr.

8. În fiecare din cele trei cutii aşezate în linie se află câte o bilă. Aşezăm în cutii câte o bilă în ordinea stânga, centru, dreapta, centru, stânga, centru etc. Dacă în cutia din stânga sunt 9 bile, în cutia din centru sunt:
a) 12 bile; b) 10 bile; c) 13 bile; d) 9 bile; e) 12 sau 13 bile.

Capitolul 3

TESTE PENTRU CONCURSURI

TESTUL NR. 1

1. Se dă şirul: 2, 3, 4, 7, 8, 9, 12, 13, 14, …

a) Să se precizeze următorii trei termeni ai şirului.

b) Să se calculeze suma termenilor şirului aflați pe pozițiile 17, 18, 19, 20, 21, 22 în şir.

2. Să se determine suma tuturor numerelor de maxim trei cifre pare care au suma cifrelor egală cu 4.

3. Un copil are patru cutii de creioane. În primele două cutii are câte 12 creioane, iar în ultimele două cutii are câte 15 creioane. Din prima cutie ia un număr de creioane, iar din a doua cutie ia atâtea câte au rămas în prima cutie. Repetă procedeul pentru a treia şi a patra cutie.

Câte creioane au rămas în cele 4 cutii?

4. Din cele 7 bucăți de hârtie de formă dreptunghiulară unele se taie în câte 5 bucăți.

a) Dacă în final se obțin 19 bucăți de hârtie, să se afle câte bucăți de hârtie au fost tăiate.

b) Care dintre numerele cuprinse între 20 şi 25 inclusiv, nu pot reprezenta numărul de bucăți de hârtie obținute după tăiere?

5. Se scriu toate numerele naturale de la 20 la 100 inclusiv. Un copil alege numerele de la stânga la dreapta începând cu 20 din 3 în 3, iar al doilea copil alege numerele de la dreapta la stânga din 5 în 5 începând cu 100.

Care este numărul ales simultan de cei doi copii?

6. Se taie o scândură de 3m în bucăți de câte un sfert de metru.

Câte tăieturi trebuie făcute?

TESTUL NR. 2

1. Un porumbel mănâncă în 2 minute 6 boabe.
În cât timp mănâncă 3 porumbei un număr de 30 boabe?

2. Se consideră următorul şir de numere: 1, 3, 7, 13, 21, 31, … .
a) Să se determine următorii doi termeni ai şirului.
b) Să se afle suma numerelor aflate pe pozițiile 9, 10, 11, 12.

3. Fie cifrele a şi b cu $1 \le a < b$.
a) Să se ordoneze crescător numerele $\overline{abb9}, \overline{a2bb}, \overline{ab9b}, \overline{aab2}$.
b) Să se afle suma tuturor numerelor $\overline{ab1}$, unde $b \ge a + 6$.

4. Tatăl are vârsta de 30 ani, iar cei trei copii ai săi au vârstele de 2, 4, respectiv 6 ani.
a) Peste câți ani vârsta tatălui va fi egală cu suma vârstelor celor trei copii?
b) Peste cât timp dublul vârstei copiilor va fi triplul vârstei tatălui?

5. Se consideră următoarele şiruri de numere:

1	1	2	3	3	4	5	5	6				49	49	50
1	2	2	3	4	4	5	6	6				49	50	50

a) Să se determine numărul de termeni ai fiecărui şir.
b) Să se determine suma termenilor fiecărui şir.
c) Să se determine în două moduri diferența sumelor termenilor fiecărui şir.

6. Folosind operațiile matematice de adunare, scădere, înmulțire şi împărțire şi parantezele şi 5 cifre de 5, reconstituiți următoarele calcule:
a) 5 5 5 5 5 = 1;
b) 5 5 5 5 5 = 8;
c) 5 5 5 5 5 = 0.

TESTUL NR. 3

1. Care este numărul minim de părți egale în care trebuie împărțit fiecare măr dintre 6 mere pentru ca fiecare din 9 copii să primească părți egale?

2. Să se determine cel mai mic număr de bețe de lungimi egale pentru a putea construi:
a) două triunghiuri; b) patru triunghiuri; c) şase triunghiuri.

Capitolul 4

TESTE PENTRU ADMITERE ÎN CLASA A V-A

TESTUL NR. 1

1. Să se afle diferența dintre numărul mu,erelor de forma $\overline{abcc}$ şi numărul numerelor de forma $\overline{aabc}$.

2. Să se determine suma tuturor numerelor $\overline{ab}$ pentru care:

$$(a + 2) \cdot (b - 2) = ab.$$

3. Suma a patru numere este 52. Al doilea număr este de trei ori mai mare decât primul număr, al treilea număr este cu 10 mai mic decât suma primelor două numere, iar al patrulea număr este cu 12 mai mare decât suma dintre al doilea şi al treilea număr.

Să se determine cele patru numere.

4. Tatăl are cu 25 ani mai mult decât fiul. Vârsta tatălui este de 6 ori mai mare decât vârsta fiului.

Peste câți ani vârsta tatălui este de 4 ori mai mare decât vârsta fiului?

TESTUL NR. 2

1. Într-o urnă sunt bile albe, negre, roşii şi verzi.

Ştiind că doar 18 bile nu sunt roşii sau verzi, că 26 de bile nu sunt albe sau negre, că doar 30 nu sunt verzi, iar bilele albe sunt cu două mai puține decât cele negre, să se determine câte bile de fiecare culoare sunt în urnă.

2. La împărțirea a două numere naturale câtul este o treime din împărțitor, iar restul este un sfert din cât. Se ştie că deîmpărțitul este număr natural de trei cifre.

a) Câte soluții are problema?

b) Să se determine suma tuturor numerelor care reprezintă deîmpărțitul.

3. Se consideră mulțimile de numere naturale $A = \{a, a + 1, a + 2, a + 3\}$, $B = \{b, b + 1, b + 2\}$, unde $a > b \geq 1$.

Să se determine mulțimile A şi B dacă suma elementelor din A şi B, luate o singură dată, este cel mult egală cu 28.

4. Să se determine numerele a, b, c, d dacă $S = a + b + c + d$, $17 < S < 43$ şi $a : 2 = b \cdot 3 = c - 4 = d + 5$.

TESTUL NR. 3

1. Suma unor numere naturale nenule consecutive este egală cu 100.

Să se afle numerele.

2. La împărțirea a două numere naturale, câtul este o treime din împărțitor, iar restul este jumătate din cât. Se ştie că deîmpărțitul este număr de trei cifre.

a) Câte soluții are problema?

b) Să se afle suma tuturor câturilor posibile.

3. Suma vitezelor a două mobile este de 30 km/h. Ştiind că o treime din viteza primului mobil micşorată cu 3 km/h reprezintă cu 2 km/h mai puțin decât un sfert din viteza celui de-al doilea mobil, să se determine:

a) vitezele celor două mobile;

b) distanța parcursă împreună de cele două mobile dacă primul merge 20 de minute, iar al doilea merge 15 minute.

4. Se consideră 4 numere. Dacă din primul număr se scade 3, la al doilea număr se adaugă 3, al treilea număr se împarte la 3, iar ultimul număr se înmulțeşte cu 3, atunci numerele devin egale.

Să se determine cele 4 numere dacă un sfert din suma lor este egală cu 20.

TESTUL NR. 4

1. Suma a 10 numere naturale nenule distincte este 58.

a) Câte soluții are problema?

b) Care este cel mai mare dintre cele 10 numere?

2. Trei elevi aveau împreună 116 lei. Primul a cheltuit jumătate din suma sa, al doilea a cheltuit o treime din suma sa, iar al treilea a cheltuit 8 lei, rămânând cu sume egale.

Ce sumă a avut fiecare?

SOLUȚII

Capitolul 1. METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE ARTIMETICĂ

1.1. METODA GRAFICĂ (FIGURATIVĂ)

1. 98 pruni, 74 meri, 35 peri; **2.** 57 tone, 68 tone, 75 tone; **3.** 29 ha, 26 ha, 37 ha; **4.** 142, 298; **5.** 40 lei, 130 lei, 550 lei; **6.** 64, 96, 128; **7.** 3 ani, 27 ani, 59 ani;
8. 24 km, 84 km; **9.** 36 bile albe, 12 bile negre; **10.** 72 km, 36 km, 108 km; **11.** 60 băieți, 87 fete.

1.2. METODA COMPARAȚIEI

1. 5 ℓ, 8 ℓ; **2.** 15 lei – cartea, 40 lei – stiloul; **3.** 4 km/h, 10 km/h, 50 km/h; **4.** 24 kg, 60 kg, 90 kg; **5.** 10 lei – cartea, 6 lei – penarul, 4 lei – pixul.

1.3. METODA FALSEI IPOTEZE

1. 12 bancnote de 5 lei şi 8 bancnote de 10 lei; **2.** 12 saci de 25 kg, 15 saci de 30 kg şi 24 saci de 35 kg; **3.** 284 kg şi 57 lăzi; **4.** 2 cu răspuns greşit, 15 cu răspuns corect, 3 fără răspuns.

1.4. METODA MERSULUI INVERS

1. 13; **2.** 360 kg; **3.** 31; **4.** 30 lei, 80 lei, 180 lei, 380 lei.

1.5. PROBLEME DE MIŞCARE

1. 360 km; **2.** 60 km/h; **3.** 15 m/s = 54 km/h, 20 m/s = 72 km/h; **4.** 30 km; **5.** 160 km, 165 km.

1.7. METODA REDUCERII LA ABSURD

1. Cea mai mică sumă a 60 de numere naturale nenule distincte este $1 + 2 + 3 + \ldots + 60 = 1830 > S$. Deci cel puțin două numere sunt egale. **2.** Pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$, numerele $2a + 4b - 1$ şi $4a + 6b + 3$ sunt numere impare şi deci produsul lor este număr impar. Cum 200 este număr par, numerele a şi b nu există.

3. Observăm că a, b, c sunt cifre nenule. Fie $n = a \cdot m + r_1$, $r_1 < a$; $n = b \cdot p + r_2$, $r_2 < b$; $n = c \cdot t + r_3$, $r_3 < c$. Deoarece $r_1 < 9$, $r_2 < 9$, $r_3 < 9$, avem $r_1 \leq 8$, $r_2 \leq 8$, $r_3 \leq 8$. Cum $r_1 + r_2 + r_3 = 23$, atunci pentru (r_1, r_2, r_3) avem tripletele (8, 8, 7), (8, 7, 8), (7, 8, 8). Atunci tripletele (a, b, c) nu pot fi decât (9, 9, 9), (9, 9, 8), (9, 8, 9), (8, 9, 9). Se arată că niciunul din numerele 999, 998, 989, 899 nu convine. **4.** După m modificări de forma $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline & \\ \hline\end{array}$ obținem $\begin{array}{|c|c|}\hline m & m \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array}$. După alte n modificări de forma $\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$ obținem $\begin{array}{|c|c|}\hline m & m \\ \hline n & n \\ \hline\end{array}$. După alte p modificări de forma $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array}$ obținem $\begin{array}{|c|c|}\hline m+p & m \\ \hline n+p & n \\ \hline\end{array}$. După alte r modificări de forma $\begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}$ obținem $\begin{array}{|c|c|}\hline m+p & m+r \\ \hline n+p & n+r \\ \hline\end{array}$. Avem $(m + p) + (n + r) = (n + p) + (m + r)$ (sume pe diagonale); a) Din $m + p = 5$, $m + r = 7$, $n + p = 6$, $n + r = 8$ avem $p = 5 - m$, $r = 7 - m$, $n = m + 1$. Avem $m = 0$, $n = 1$, $p = 5$, $r = 7$; b) Cum $102 + 99 \neq 100 + 100$, nu avem soluție. **5.** Fie $n = \overline{abcd}$, cu $a \neq 0$. Dacă $b = 0$ sau $c = 0$ sau $d = 0$, atunci în fiecare caz avem $n = \overline{a000}$. Presupunem $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$. Atunci avem $a \geq bcd$, $b \geq acd$, $c \geq abd$, $d \geq abc$. Prin înmulțirea inegalităților, notând $A = a \cdot b \cdot c \cdot d$, rezultă $A \geq A \cdot A \cdot A$ şi deci $A \cdot A \leq 1$, de unde $A = 1$ şi deci $n = 1111$. Avem maximul egal cu 9000.

1.8. PROBLEME DE NUMĂRARE

1. a) Sunt 9 pătrate de latură 1, 4 pătrate de latură 2 şi 1 pătrat de latură 3. În total, sunt 9 + 4 + 1= 14 pătrate; b) Se află pe rând numărul pătratelor de latură 1, 2, 3, 4, respectiv 5. Sunt 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55 de pătrate. **2.** a) 8 + 5 = 13; b) (3 + 3 + 3) + (2 + 2 + 2 + 2) = 17. **3.** $n = 2$ şi $\overline{ab} = \overline{ba} \Rightarrow a = b \Rightarrow 9$ numere; $n = 3$ şi $\overline{abc} = \overline{cba} \Rightarrow a = c \Rightarrow 9 \cdot 10 = 90$ de numere; $n = 4$ şi $\overline{abcd} = \overline{dcba} \Rightarrow a = d$; $b = c \Rightarrow 9 \cdot 10 = 90$ de numere; $n = 5$ şi $\overline{abcde} = \overline{edcba} \Rightarrow a = e$; $b = d \Rightarrow 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ de numere; $n = 6$ şi $\overline{abcdef} = \overline{fedcba} \Rightarrow a = f$; $b = e$; $c = d \Rightarrow 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ de numere. **4.** Luăm numerele de $n = \overline{abc}$ în toate

CUPRINS

Capitolul 1. METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE ARTIMETICĂ...5
1.1. METODA GRAFICĂ (METODA FIGURATIVĂ)...5
1.2. METODA COMPARAȚIEI...11
1.3. METODA FALSEI IPOTEZE...16
1.4. METODA MERSULUI INVERS...17
1.5. PROBLEME DE MIŞCARE...20
1.6. METODA ALGEBRICĂ (opțional)...23

Capitolul 2. TESTE GRILĂ...41

Capitolul 3. TESTE PENTRU CONCURSURI...59

Capitolul 4. TESTE PENTRU ADMITERE ÎN CLASA A V-A...96

SOLUȚII...121
Capitolul 1. METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE ARTIMETICĂ...121
Capitolul 2. TESTE GRILĂ...127
Capitolul 3. TESTE PENTRU CONCURSURI...135
Capitolul 4. TESTE PENTRU ADMITERE ÎN CLASA A V-A...167