NUMERE RAȚIONALE

1 Mulţimea numerelor raţionale; reprezentarea pe axă; opusul unui număr; valoarea absolută; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$$

$\mathbb{Q}$ se numeşte mulțimea numerelor raționale (sau fracționare).

Observație: În aplicații este util de a considera un număr rațional de forma $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$ şi $(a, b) = 1$, adică fracția $\frac{a}{b}$ este ireductibilă.

• O fracție este **ireductibilă** dacă numărătorul şi numitorul sunt prime între ele.

• O fracție ordinară se transformă în fracție zecimală împărțind numărătorul la numitor.

a) Dacă numitorul se compune din factorii 2 şi 5, produse ale lor sau ale puterilor lor, se obține o fracție zecimală finită.

b) Dacă numitorul conține şi alți factori primi decât cei de la punctul a), se obține o fracție zecimală periodică.

c) Dacă numitorul conține alți factori decât cei de la punctul a), se obține o fracție zecimală periodică simplă.

EXERCIȚII PENTRU CONSOLIDAREA CUNOŞTINȚELOR DE BAZĂ

1. Stabiliți valoarea de adevăr pentru propozițiile:

a) $-0{,}5 \in \mathbb{Q}$; b) $0 \in \mathbb{Q}$; c) $2{,}(3) \notin \mathbb{Q}$; d) $25 \in \mathbb{Q}$;

e) $1 \in \mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$; f) $-\frac{4}{2} \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}$; g) $\frac{2}{3} \in \mathbb{N} \cap \mathbb{Q}$.

2. Calculați:

a) $\left|-\frac{1}{2}\right|$; b) $|-2|$; c) $\left|+\frac{2}{3}\right|$; d) $\left|-\frac{3}{3}\right|$.

3. Să se ordoneze crescător numerele raționale: $-1; 4; -\frac{2}{3}; 0; \frac{5}{2}; -9{,}2; \frac{11}{4}$.

4. Ordonați descrescător numerele: $-20; +2,5; -1,(3); -4; \frac{5}{4}; 11$.

EXERCIȚII CU NIVEL MEDIU DE DIFICULTATE

5. Aflați $x \in \mathbb{Q}$, astfel încât:

a) $|x| = 1,(2)$; b) $|x| = 0$; c) $|x| = -\frac{2}{3}$; d) $|x| = 1\frac{1}{2}$.

6. Comparați numerele:

a) $\frac{2}{3}$ și $\frac{4}{9}$; b) -5 și $-\frac{11}{2}$; c) 2,(32) și 2,3(2);

d) $-\frac{4}{5}$ și $-\frac{6}{7}$; e) 8 și $\frac{26}{3}$; f) –3,4(5) și 3,(45);

g) $-\frac{8}{5}$ și $-\frac{11}{3}$; h) $\frac{1996}{1997}$ și $\frac{1997}{1998}$; i) $-\frac{2001}{2002}$ și $-\frac{2002}{2003}$.

7. Se dau mulțimile: $A = \left\{-2; -4(1); 3,2; -\frac{7}{5}; +5,2(3)\right\}$; $B = \{b \mid b = -x$ și $x \in A\}$, $C = \{c \mid c = |x|$ și $x \in A\}$. Să se expliciteze mulțimile: B, C, $B \cap C$, $A - C$.

8. Reprezentați pe axa Ox numerele raționale care verifică relațiile:

a) $|x| = \frac{3}{2}$; b) $|x| = 1,6$; c) $|x| \le 0$.

EXERCIȚII CU NIVEL SPORIT DE DIFICULTATE

9. Arătați că numerele: a) $\frac{7-2x}{4}$; b) $\frac{3x-2}{9}$ aparțin mulțimii $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.

10. Ordonați crescător numerele: a; $-a$ și 0, oricare ar fi $a \in \mathbb{Q}^*$.

11. Ordonați crescător numerele: $x; \frac{1}{x}; x^2; \frac{1}{x^2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}_+ - \{1\}$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1B **(15 min.)**

1. Stabiliți valoarea logică a propozițiilor: $3 \in \mathbb{N}$; $-4 \in \mathbb{Z}$; $\frac{4}{5} \in \mathbb{Q}$; $-2,(3) \notin \mathbb{Q}$; $-3 \notin \mathbb{Q}$; $\frac{4}{5} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$; $0,(3) \notin \mathbb{Z}$; $-\frac{8}{4} \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}$; $1 \notin \mathbb{Z} - \mathbb{N}$.

2. Reprezentați pe axa numerelor: $-2; \frac{4}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{1}{4}; \frac{7}{4}; \frac{9}{2}$.

3. Să se precizeze opusul fiecărui număr: $\frac{3}{5}; -2; \left|\frac{4}{7}\right|; \left|-\frac{3}{5}\right|; -\left|-\frac{1}{4}\right|$.

4. Ordonați crescător numerele: $-3; \frac{4}{5}; \frac{3}{2}; -2(3); -3{,}7; -2{,}33; \frac{5}{2}; 2{,}(5)$.

Barem de notare: **1.** 30p; **2.** 20p; **3.** 20p; **4.** 20p; 10p din oficiu.

Testul 2[M] (15 min.)

1. Fie mulțimea: $A=\left\{-2; -\frac{1}{4}; \frac{2}{3}; \frac{4}{2}; -\frac{6}{3}; 1{,}3; -1{,}(7)\right\}$. Să se expliciteze mulțimile: $A \cap \mathbb{N}$; $A \cap \mathbb{Z}$; $A \cap (\mathbb{Z}-\mathbb{N})$; $A-\mathbb{Z}$.

2. Comparați numerele: a) $\frac{4}{3}$ cu $\frac{2}{5}$; b) –1,7 cu –1,(7); c) $-\frac{2005}{2004}$ cu $-\frac{2006}{2005}$.

3. Reprezentați pe axă numerele raționale care verifică relația:

a) $\left|a+\frac{1}{2}\right| \le 0$; b) $|a-2|=-\frac{1}{4}$.

4. Ordonați crescător numerele: $-2; 4; -\frac{4}{3}; -1(2); -3{,}5; -\frac{6}{4}$.

Barem de notare: **1.** 30p; **2.** 30; **3.** 15p; **4.** 15p; 10p din oficiu.

2 Scrierea unui număr raţional sub formă zecimală sau fracţionară; amplificare; simplificare

Fracțiile zecimale se transformă în fracții ordinare astfel:

$$\overline{a,b}=\frac{\overline{ab}}{10};\quad \overline{a,(b)}=a\frac{b}{9};\quad \overline{a,b(c)}=a\frac{\overline{bc}-b}{90}.$$

A amplifica o fracție înseamna a înmulți atât numărătorul cât şi numitorul cu acelaşi număr diferit de 0.

A simplifica o fracție înseamna a înmpărți atât numărătorul cât şi numitorul la acelaşi număr diferit de 0.

EXERCIȚII PENTRU CONSOLIDAREA CUNOȘTINȚELOR DE BAZĂ

1. Scrieți sub formă zecimală:

a) $-\frac{1}{5}; -\frac{7}{4}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{7}{6}; \frac{7}{8}; \frac{9}{10}; \frac{13}{16}$; b) $-1\frac{1}{3}; -\frac{1}{80}; \frac{1}{25}; \frac{1}{125}; \frac{1}{32}; \frac{1}{20}$.

2. Scrieți sub formă fracționară: 0,9; 0,1(7); –1,(5); –0,001; 1,03; 3,2; –4,(25); 1,3(72); 25,041; –3,00(2); –0,31; –4,(3).

3. Scrieți ca fracție zecimală și precizați partea întreagă și partea fracționară a fiecăruia:
$\frac{23}{10}; -\frac{4}{5}; -2; \frac{5}{2}; \frac{45}{8}; -\frac{3}{20}$.

4. Aproximați, cu o eroare mai mică de o zecime, prin lipsă și prin adaos, numerele:

$3{,}145; -1{,}3(2); -4{,}3(14); \frac{13}{4}; \frac{1}{3}; 1\frac{1}{7}$.

5. Amplificați:

a) cu 10 numerele: $-\frac{1}{2}; 1\frac{3}{4}; -0{,}5; 0; \frac{4}{3}; -2{,}52$;

b) cu 2 numerele: $\frac{-3}{-5}; \frac{+4}{3}; \frac{+3}{-15}; -0{,}5; 1{,}25$.

6. Simplificați, obținând fracții ireductibile:

$-\frac{6}{8}; \frac{5}{15}; -1\frac{3}{9}; \frac{144}{156}; -\frac{7}{98}; \frac{121}{22}; -\frac{36}{24}; \frac{45}{75}; \frac{-750}{210}; -\frac{24}{64}; \frac{-32}{-48}; \frac{120}{-300}$.

EXERCIȚII CU NIVEL MEDIU DE DIFICULTATE

7. Determinați valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care avem:

a) $\frac{1}{2} \le \frac{n}{3} \le \frac{7}{6}$; b) $\frac{2}{3} < \frac{n}{4} < \frac{7}{2}$; c) $\frac{1}{5} < \frac{1}{n} < \frac{1}{3}$; d) $\frac{5}{2} < \frac{3}{n} < \frac{10}{3}$;

e) $\frac{7}{8} < \frac{2n}{24} \le \frac{4}{3}$; f) $\frac{2}{3} \le \frac{14}{3n} \le \frac{7}{3}$; g) $\frac{1}{3} < \frac{n+3}{4} < \frac{11}{6}$.

8. Dacă $A = \left\{-2; -\frac{4}{3}; -\frac{2}{5}; 0; \frac{2}{3}; 2,(3)\right\}$, să se enumere elementele mulțimilor:

$B = \{y \mid y = -x$ și $x \in A\}$ și $C = \{y \mid |y| \in A\}$.

EXERCIȚII CU NIVEL SPORIT DE DIFICULTATE

9. Aflați $x \in \mathbb{Q}$, astfel încât:

a) $|x| = 0$; b) $|x| = \frac{1}{4}$; c) $|x| = -\frac{3}{2}$; d) $|x| = x$; e) $|x| = -x$.

10. Aflați a 2005-a zecimală a numărului: a) 2,1(12); b) $\frac{1}{7}$.

11. Fie mulțimile: $A = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{4}{5}; 0; -3; 2{,}1; -\frac{11}{2}\right\}$; $B = \{x \in A \mid |x| = x\}$; $C = \{x \in A \mid |x| = -x\}$.

Să se expliciteze mulțimile B și C.

Test de evaluare[M] (25 min)

1. Scrieți sub formă fracționară: $0{,}3; -1{,}55; 0,(3); -1,(4); -0{,}055; 4{,}1(23)$.

2. a) Amplificați cu 2: $-\frac{1}{3}; 4; 0{,}5; -1,(3)$;

b) Simplificați, obținând fracții ireductibile: $-\frac{18}{24}; \frac{48}{90}; \frac{121}{1221}; -\frac{0{,}8}{0{,}24}$.

3. Comparați numerele:

a) 5 şi $\frac{26}{5}$; b) $-\frac{9}{2}$ şi $-\frac{13}{3}$; c) –2,(32) şi –2,3(2); d) $\frac{2004}{2005}$ şi $\frac{2005}{2006}$.

4. Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care avem: a) $\frac{1}{5} < \frac{1}{n} < \frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{6} < \frac{n+3}{8} < \frac{11}{12}$.

Barem de notare: **1.** 30p; **2.** 20p; **3.** 20p; **4.** 20p; 10p din oficiu.

3 Adunarea şi scăderea numerelor raţionale

La adunarea şi scăderea fracțiilor se aduc fracțiile la acelaşi numitor – cel mai mic numitor comun – şi se adună (se scad) numărătorii, la numitor trecându-se numitorul comun.

EXERCIȚII PENTRU CONSOLIDAREA CUNOŞTINȚELOR DE BAZĂ

1. Efectuați:

a) $\frac{1}{11}+\frac{2}{11}$; b) $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}$; c) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{5}{4}\right)$;

d) $\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{9}$; e) $\frac{1}{3}+\frac{5}{18}+\left(-\frac{1}{9}\right)+\frac{5}{27}$; f) $\frac{1}{48}+\frac{3}{80}$;

g) $\frac{1}{3^2\cdot 5}+\frac{3}{3^3\cdot 7}$; h) $\frac{1}{280}+\frac{1}{720}+\left(-\frac{5}{840}\right)$; i) $\frac{1}{a\cdot b}+\left(-\frac{1}{a\cdot b}\right)+\frac{0}{a\cdot b}$.

2. Efectuați:

a) $\frac{7}{5}-\frac{2}{5}$; b) $-\frac{13}{19}-\left(-\frac{1}{19}\right)$; c) $\frac{1}{2}-\frac{5}{4}-\frac{9}{6}$; d) $7-\frac{1}{7}$ e) $2\frac{1}{3}-3\frac{1}{3}$;

f) $\frac{2}{7}-\frac{5}{14}$; g) $5\frac{1}{3}-2$; h) $\frac{2}{5}-\frac{1}{10}$; i) $-2\frac{1}{3}+1\frac{2}{5}-\left(-\frac{7}{15}\right)$.

3. Efectuați operațiile:

a) $\frac{1}{14}-\left(\frac{5}{28}-\frac{1}{84}\right)$; b) $\left(\frac{1}{56}-\frac{3}{56}\right)-\left(\frac{1}{42}-\frac{1}{70}\right)$; c) $2{,}6-\left(-3\frac{1}{2}\right)$;

d) $-5{,}2-\left(-3\frac{1}{5}\right)$; e) $-1\frac{1}{6}-[+3,(6)]$; f) $1\frac{2}{3}-\left(-\frac{5}{6}\right)-\frac{4}{18}$.

EXERCIȚII CU NIVEL MEDIU DE DIFICULTATE

4. Calculați:

a) $\left(-\frac{7}{12}\right)+\frac{1}{12}+\left(-\frac{5}{12}\right)+\frac{11}{12}$; b) $\frac{4}{15}+\frac{2}{5}+\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}$;

c) $\frac{2}{7}+\frac{1}{14}+\left(-\frac{13}{14}\right)+\left(-\frac{3}{7}\right)$; d) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{2}{7}\right)+\frac{1}{4}+\left(-\frac{15}{49}\right)+\frac{2}{8}$;

Capitolul II
PATRULATERE

1 Poligon. Patrulater

Patrulaterul convex este patrulaterul ale cărui diagonale aparţin interiorului patrulaterului.
Patrulaterul concav este patrulaterul cu o diagonală în exteriorul patrulaterului.
Patrulaterele convexe sunt cele mai cunoscute patrulatere. Iată câteva:
• **paralelogramul**: patrulaterul cu laturile opuse paralele două câte două;
• **rombul**: paralelogramul cu două laturi consecutive egale;
• **dreptunghiul**: paralelogramul cu un unghi drept;
• **pătratul**: rombul cu un unghi drept sau dreptunghiul cu două laturi consecutive egale;
• **trapezul**: patrulaterul cu două laturi opuse paralele;
• **trapezul isoscel**: două laturi sunt paralele şi celelalte două sunt congruente;
• **patrulater ortodiagonal**: patrulaterul cu diagonal perpendiculare;
• **patrulaterul inscriptibil**: patrulaterul ale cărui vârfuri aparţin unui cerc; pătratul, dreptunghiul şi trapezul isoscel sunt patrulater inscriptibile;
Condiţia de inscriptibilitate: unghiurile opuse sunt suplemenare; unghiul format de o diagonal cu o latură este egal cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă.
• **patrulaterul circumscriptibil**: patrulaterul în care poate fi înscris un cerc.
Teorema lui Pithot se referă la acest tip de patrulatere: „Un patrulater convex este circumscriptibil dacă şi numai dacă sumele lungimilor laturilor opuse sunt egale".

PROBLEME PENTRU CONSOLIDAREA CUNOŞTINŢELOR DE BAZĂ

1. Numiţi toate poligoanele reprezentate în fig. 1. Precizaţi denumirea fiecăruia. Câte sunt?

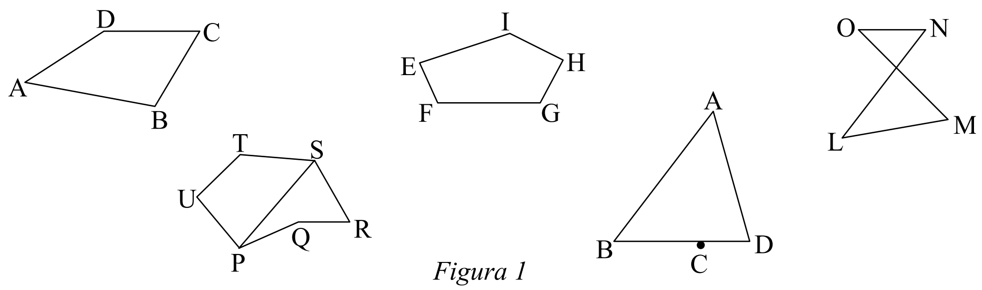

Figura 1

2. Pentru patrulaterele convexe din fig. 1, precizaţi:
a) laturile;
b) perechile de laturi opuse;
c) perechile de laturi consecutive;
d) unghiurile;
e) diagonalele.

3. Scrieți denumirile poligoanelor din fig. 2; precizați de fiecare dată diagonalele (interioare) poligonului.

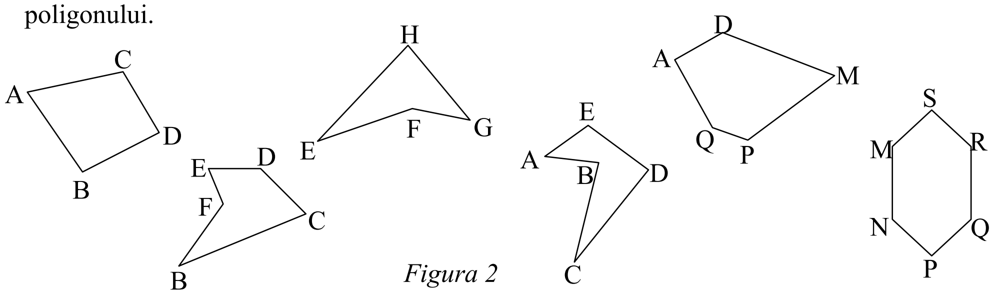

Figura 2

4. Stabiliți numărul diagonalelor pentru un patrulater convex, un pentagon convex, un hexagon convex.

5. Desenați triunghiurile ABD și CBD isoscele cu baza [BD] și precizați dacă patrulaterul ABCD este concav sau convex.

PROBLEME CU NIVEL MEDIU DE DIFICULTATE

6. Desenați triunghiurile ABC și ACD astfel încât figura ABCD să fie:
a) patrulater concav; b) patrulater convex; c) să nu fie patrulater.

7. Desenați un patrulater convex ABCD cu:
a) două laturi paralele și de măsuri diferite; b) două laturi paralele și congruente;
c) două laturi consecutive congruente; d) diagonalele perpendiculare.

8. Un patrulater convex ABCD are AB = 12 cm, BC cu 10 mm mai mare decât AB, CD = = 0,2 m, iar AD cu 0,7 dm mai mică decât BC. Să se afle perimetrul patrulaterului.

9. Un patrulater este împărțit de una din diagonale în două triunghiuri dintre care unul are perimetrul de 26 cm, iar celălalt de 28 cm. Dacă perimetrul patrulaterului este de 34 cm să se afle lungimea diagonalei.

2 Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex

Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este de 360°.

PROBLEME PENTRU CONSOLIDAREA CUNOȘTINȚELOR DE BAZĂ

1. Determinați măsurile unghiurilor notate cu x și y în figura 1.

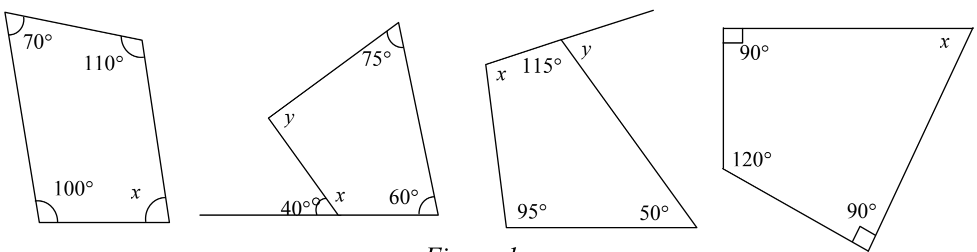

Figura 1

2. Desenați un patrulater convex cu:

a) 2 unghiuri opuse de 90°;
b) 2 unghiuri consecutive de 90°;
c) 3 unghiuri obtuze;
d) 3 unghiuri ascuțite;
e) toate unghiurile drepte.

3. Câte unghiuri ascuțite poate avea un triunghi? Dar un patrulater?

4. Dacă un patrulater convex ABCD are $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = 90°$, cum se numesc unghiurile D şi B?

5. Să se afle măsurile unghiurilor unui patrulater convex ştiind că sunt direct proporționale cu 2, 3, 5 şi respectiv 8.

6. Să se afle măsura unuia dintre unghiurile unui patrulater convex ştiind că este media aritmetică a măsurilor celorlalte unghiuri ale patrulaterului.

7. În exteriorul triunghiului echilateral ABC se construieşte triunghiul dreptunghic isoscel BCD cu $m(\sphericalangle B) = 90°$. Să se afle unghiurile patrulaterului determinat de A, B, C, D.

PROBLEME CU NIVEL MEDIU DE DIFICULTATE

8. Se consideră triunghiurile ABC şi ACD cu AB = BC, AD = DC, $m(\sphericalangle BAC) = 30°$ şi $m(\sphericalangle ADC) = 80°$.

a) Să se calculeze măsurile unghiurilor patrulaterului ABCD.
b) Să se verifice dacă $AC \perp BD$.

9. Aflați măsura fiecăruia dintre unghiurile patrulaterelor din figura 2, ştiind că sunt ortodiagonale.

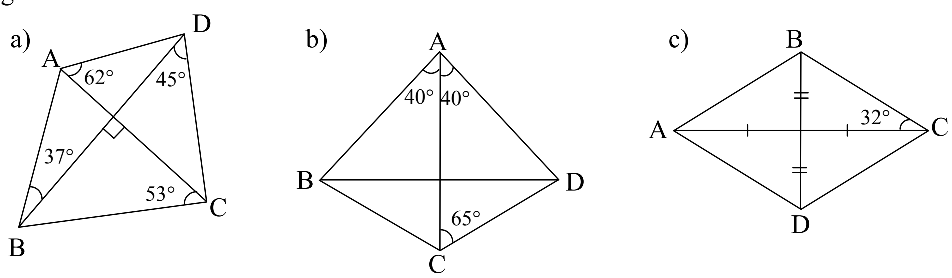

Figura 2

10. Se consideră triunghiurile ABC cu AB = AC şi ADC cu DA = DC. [DE bisectoarea unghiului ADC ($E \in (AC)$) intersectează BC în punctul F. Să se arate că:

a) AF = FC;
b) patrulaterul AFCD este ortodiagonal (are diagonalele perpendiculare);
c) [FD este bisectoarea unghiului AFC.

11. Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC (AB = AC) şi triunghiul ADC cu AD = = DC. Să se arate că:

a) ΔAFC este dreptunghic isoscel, unde F este mijlocul segmentului (BC);
b) F aparține bisectoarei unghiului ADC;
c) patrulaterul ADCF este ortodiagonal.

12. În triunghiul echilateral ABC se construieşte $DE \parallel BC$, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$.

a) Să se calculeze măsurile unghiurilor patrulaterului BCED.
b) Să se arate: BE = DC.

Probleme cu nivel sporit de dificultate

13. Un triunghi isoscel ABC are un unghi cu măsura de 15°. Se trasează PQ || AB, P ∈ (AC), Q ∈ (BC). Să se determine măsurile unghiurilor patrulaterului ABQP.

14. Fie patrulaterul convex ABCD în care: ∢C ≡ ∢D, m(∢A) = 2 · m(∢D) + 5°, m(∢B) = = m(∢C) – 5°.
a) Să se calculeze măsurile unghiurilor patrulaterului ABCD.
b) Să e arate că d(C, AD) = d(D, BC).

15. Fie ΔABC cu m(∢BAC) = 90°, m(∢ACB) = 30° şi ΔBCD cu m(∢CBD) = 90°, m(∢BDC) = = 60°.
a) Să se determine măsurile unghiurilor patrulaterului ACDB.
b) Să se studieze dacă d(B, AC) = d(B, CD).

16. Se consideră triunghiurile ABC şi BCD astfel încât A şi D se află în semiplane opuse faţă de BC, m(∢BAC) = 70°, m(∢ABC) = m(∢ACB) + 10°, m(∢BDC) = m(∢ABC) + m(∢ACB), m(∢DBC) este 50% din m(∢ABC) şi m(∢BCD) este $\frac{4}{5}$ din m(∢ACB).
a) Să se determine măsurile unghiurilor patrulaterului ABDC.
b) Să se arate că AB⊥ BD; sunt unghiurile BAC şi BDC suplementare?

17. Patrulaterul convex ABCD are ∢B ≡ ∢D; m(∢A) reprezintă $\frac{1}{3}$ din m(∢C) şi 25% din m(∢B).
a) Să se determine măsurile unghiurilor patrulaterului ABCD.
b) Dacă {E} = AD ∩ BC, să se arate că BA = BE. BCDF are unghiurile suplementare?

18. Măsurile unghiurilor unui patrulater convex sunt invers proporţionale cu numerele 3, 10, 15 şi $\frac{10}{3}$.
a) Să se calculeze măsurile unghiurilor patrulaterului.
b) Să se arate că unghiurile opuse sunt suplementare.

19. Măsurile unghiurilor patrulaterului convex ABCD sunt invers proporţionale cu numerele 5, 6, 2 şi respectiv 3.
a) Să se determine măsurile unghiurilor A, B, C, D.
b) Dacă AD ∩ BC = {P}, să se arate că măsurile unghiurilor triunghiului CDP sunt direct proporţionale cu numerele 6, 16, 14.

20. Măsurile unghiurilor unui patrulater convex ABCD sunt direct proporţionale cu numerele 25, 15, 35 şi respectiv 45.
a) Să se determine măsurile unghiurilor A, B, C, D.
b) Să se arate că ∢A şi ∢C sunt suplementare.
c) Dacă bisectoarele unghiurilor ABC şi ADC se intersectează în punctul P, atunci:
  i) să se determine m(∢DPB);
  ii) să se arate că unghiurile CDP şi ABP sunt complementare.

3 Paralelogramul

Paralelogramul este patrulaterul convex cu laturile opuse paralele.
Proprietăți:
- laturile opuse sunt congruente;
- diagonalele se înjumătățesc;
- unghiurile opuse sunt congruente;
- unghiurile alăturate sunt suplementare.
- nu este nici inscriptibil, nici circumscriptibil.

PROBLEME PENTRU CONSOLIDAREA CUNOȘTINȚELOR DE BAZĂ

1. Demonstrați că bisectoarele unghiurilor consecutive într-un paralelogram sunt perpendiculare.

2. Un paralelogram ABCD are m(∢B) = 120°. Calculați măsurile celorlalte unghiuri ale paralelogramului.

3. Calculați lungimea unei laturi a unui paralelogram, ştiind că perimetrul său este de 70 cm, iar una dintre laturi este egală cu $\frac{1}{4}$ din latura consecutivă ei.

4. Calculați lungimile laturilor consecutive ale unui paralelogram, ştiind că suma lor este de 18 cm, iar una din laturi este cât triplul celeilalte.

5. Determinați perimetrul unui paralelogram, ştiind că o latură este de 25,6 cm, iar latura consecutivă ei are lungimea cât $\frac{5}{8}$ din ea.

6. Diferența lungimilor a două laturi consecutive ale unui paralelogram este de 16,5 cm, iar una reprezintă $\frac{8}{3}$ din cealaltă. Calculați perimetrul paralelogramului.

PROBLEME CU NIVEL MEDIU DE DIFICULTATE

7. Pe diagonala (BD) a paralelogramului ABCD se consideră punctele E şi F, astfel încât [DE] ≡ [BF]. Demonstrați că patrulaterul AFCE este un paralelogram.

8. Fie punctele M, N, P mijloacele laturilor ΔABC, astfel încât M ∈ (AB), N ∈ (BC), P ∈ ∈ (AC). Determinați natura patrulaterului MBNP.

9. Desenați triunghiul ABC şi prelungiți laturile AB şi AC cu două segmente [AE] ≡ [AB] şi [AD] ≡ [AC]. Demonstrați că patrulaterul CBDE este paralelogram.

10. Fie paralelogramul ABCD şi punctele M ∈ (AB), N ∈ (AD), P∈(DC) şi Q ∈ (BC), astfel încât [AM] ≡ [DN] ≡ [CP] ≡ [BQ]. Determinați natura patrulaterului MNPQ.

11. Se dă paralelogramul ABCD, unde M ∈ (DC), [DM] ≡ [MC], iar N ∈ (AB), [AN] ≡ [NB]. Dacă AM ∩ DB = {E} şi CN ∩ BD = {F}, demonstrați că [DE] ≡ [EF] ≡ [FB].

12. În paralelogramul ABCD se duc (AX bisectoarea ∢A şi (CY bisectoarea ∢C. Dacă AX ∩ BD = {E}, iar CY ∩ BD = {F}, demonstrați că [AE] ≡ [CF].

MODELE DE SUBIECTE PENTRU TEZĂ ŞI OLIMPIADE

MODELE DE TEZĂ

Teza 1 (100 min.)

I. 1. a) Rezultatul calculului: $-3 \cdot (-17)$ este ....

b) Calculând: $\frac{5}{8} \cdot (-2) + 2{,}5$, obţinem ....

2. a) Media aritmetică a numerelor 2; 6 şi 11 este ....

b) Media geometrică a numerelor $4+\sqrt{5}$ şi $4-\sqrt{5}$ este ....

3. Dacă $\frac{x}{y} = \frac{5}{7}$ şi $x + y = 36$, atunci:

a) $x =$ ....

b) Dacă $x =$ p% din y, atunci p% = ... %

4. a) Soluţia ecuaţiei $2(3x - 1) = 6$ este ....

b) Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $|2x-3| = 17$, este ....

5. Valorile întregi ale lui x pentru care $\frac{3}{x+1} \in \mathbb{Z}$, sunt ....

6. Şase caiete de matematică costă 1,8 lei. Opt caiete de acelaşi fel costă ...... lei.

7. În triunghiul dreptunghic ABC cu m(∢A) = 90°, se ştie că m(∢C) = 30°, înălţimea [AD], D ∈ BC, este de 6 cm, atunci AC este egală cu .... cm.

8. Determinaţi mulţimea $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{1}{5} < \frac{2n+1}{2} \le 2 \right\}$.

9. Calculaţi $2\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) - 1{,}1(6)$.

II. 10. Determinaţi numerele raţionale x, y şi z, ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile:

a) $2x = 5z$; b) $40\% \cdot y = 75\% \cdot x$; c) $x + 4y - 5z = 13$.

11. Fie paralelogramul ABCD unde se consideră punctele E, F, G şi H mijloacele laturilor [AB], [BC], [CD] respectiv [DA].

a) Stabiliţi natura patrulaterului EFGH;

b) Dacă AC + BD = 15 cm, calculaţi P_{EFGH}.

12. Fie trapezul ABCD, isoscel cu AB || CD. Se ştie că m(∢A) = 60°; [AD] ≡ [DC] ≡ [BC] = 4 cm.

a) Dacă O este mijlocul lui [AB], demonstraţi că DOBC este romb.

b) Calculaţi perimetrul trapezului.

Barem de notare: **1.** 0,5p; **2.** 0,5p; **3.** 0,5p; **4.** 0,5p; **5.** 0,5p; **6.** 0,5p; **7.** 0,5p; **8.** 0,5p; **9.** 0,5p; **10.** 1,5p; **11.** 1,5p; **12.** 1,5p; 1p din oficiu.

TESTE PENTRU PREGĂTIREA OLIMPIADELOR

Testul 1

1. Dacă $a \in \mathbb{Q}$ şi $b \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\frac{a-b-1}{5b-4a-5} = \frac{1}{5}$, calculaţi valoarea raportului $\frac{3a-2b}{5a-4b}$.

2. Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9$ o scriere a numerelor naturale 1, 2, 3, …, 9 într-o altă ordine. Arătaţi că numărul $A = (a_1 - 1) \cdot (a_2 - 1) \cdot (a_3 - 1) \cdot \ldots \cdot (a_9 - 1)$ este par.

3. Fie M un punct în interiorul paralelogramului ABCD. Arătaţi că se poate construi un patrulater convex cu aria egală cu jumătate din cea a paralelogramului ABCD şi ale cărui laturi au lungimile respectiv egale cu cele ale segmentelor MA, MB, MC, MD.

4. a) Arătaţi că, într-un triunghi, mediana corespunzătoare oricărei laturi este mai mică decât semisuma lungimilor celorlalte două laturi.
b) În triunghiul ABC, (AD este bisectoarea unghiului A ($D \in (BC)$). Paralela prin B la AD intersectează dreapta AC în E. Fie AM perpendiculară pe EB ($M \in EB$). Arătaţi că: $MC \leq 1/2 \cdot \mathcal{P}_{ABC}$ ($\mathcal{P}_{ABC}$ este perimetrul triunghiului ABC).

Concursul revistei „Arhimede“, Bucureşti, 2003

Testul 2

1. Aflaţi toate fracţiile mai mari decât $\frac{1}{3}$, cu proprietatea că mărind numărătorul cu un număr natural şi înmulţind numitorul cu acelaşi număr, fracţia nu-şi schimbă valoarea.

2. Fie suma $S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{2004^2}$.

a) Ţinând cont eventual de faptul că $n(n-1) < n^2$, arătaţi că: $S < \frac{4007}{2004}$.

b) $\{S\} < \frac{2003}{2004}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea zecimală a lui x.

(Revista Arhimede)

3. Se consideră triunghiul ABC, în care M, N, P, Q sunt mijloacele segmentelor [BC], [AM], [BN], respectiv [AP].
a) Aflaţi raportul ariilor patrulaterului MNQP şi triunghiului ABC.
b) Dacă, în plus, triunghiul ABC este isoscel de bază BC, arătaţi că triunghiul MNP este isoscel.

4. a) Demonstraţi că un patrulater convex şi ortodiagonal (cu diagonalele perpendiculare) este romb dacă şi numai dacă punctul de intersecţie al diagonalelor este egal depărtat de mijloacele laturilor patrulaterului.
b) Fie M un punct în interiorul unui pătrat ABCD. Atunci segmentele [MA], [MB], [MC] şi [MD] sunt laturile unui patrulater convex.

Concursul revistei „Arhimede“, Bucureşti, faza zonală, 2004