Petre Năchilă Cătălin-Eugen Năchilă

Exerciţii şi probleme pentru cercurile de matematică

Clasa a VI-a

Ediţia a III-a revizuită şi adăugită

Editura Nomina

ALGEBRĂ

Capitolul I
NUMERE NATURALE. DIVIZIBILITATE

1. Să se determine două numere naturale a căror sumă este 733, iar suma răsturnatelor celor două numere este 337.

2. Să se determine numărul perechilor de numere naturale $\overline{ab2}$ şi $\overline{xy3}$ a căror sumă este egală cu suma răsturnatelor lor.

3. Să se scrie ca sumă de două pătrate de două numere naturale următoarele numere: a) 10^2; b) 10^3; c) 10^{2n}; d) 10^{2n+1}, $n \in \mathbf{N}^*$.

4. Să se scrie ca sumă de două pătrate de două numere naturale următoarele numere: a) 25^2; b) 25^3; c) 25^{2n}; d) 25^{2n+1}, $n \in \mathbf{N}^*$.

5. Să se determine numărul cifrelor de 9 care apar în scrierea zecimală a următoarelor numere:
a) $3 \cdot (10^{30} - 1)$; b) $4 \cdot (10^{50} - 3)$; c) $5 \cdot (10^n - 1)$; d) $8 \cdot (10^n - 1)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

6. Să se determine pătratele perfecte de forma:
a) $2^6 + 2^7 + 2^n$, $n \in \mathbf{N}^*$; a) $2^m + 2^{m+1} + 2^n$, $m \in \mathbf{N}^*$ fixat, $n \in \mathbf{N}^*$.

7. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ ştiind că: $100 < 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} < 400$.

8. Fie $a, b, c \in \mathbf{N}$ astfel încât $2a + 3b + 4c = 29$; $5a + 4b + 3c = 34$. Să se determine $(a + 5b + 9c)(c - a)$.

9. Să se determine numerele naturale n ştiind că împărțind pe n la 19 se obține câtul egal cu restul împărțirii lui n la 13, iar împărțind pe n la 13 se obține câtul egal cu restul împărțirii lui n la 19.

10. Să se determine numărul $\overline{abc}$, ştiind că: $\overline{abbc} = \overline{abb} + \overline{ab} + a + 1773$.

11. Să se determine numărul natural n de 5 cifre pentru care $\overline{6n} = 4 \cdot \overline{n6}$.

12. Să se determine numerele $\overline{xy}$ ştiind că $\overline{xy} + \overline{yx} = k^2$, $k \in \mathbf{N}$.

13. Să se determine sumele cifrelor numerelor:
a) $10^{20} + 10^{10} - 5$; b) $10^{2n} + 10^n - 5$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

14. Există numere naturale de 3 cifre mai mici de 3 ori decât răsturnatele lor?

15. Să se scrie următoarele numere ca produs de două numere consecutive:
a) 111222; b) 1111122222; c) $\underbrace{111...1}_{n}\underbrace{222...2}_{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

16. Să se determine ultima cifră a numărului $a = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{4n}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

17. Să se demonstreze că există numere naturale nenule m, n şi numere naturale de două cifre $\overline{ab}$ pentru care $\overline{mab} \cdot \overline{nab} = \overline{pab}$, unde $p \in \mathbf{N}^*$.

18. Să se determine numerele $\overline{xy}$ (de două cifre) în cazurile:
a) $x + y = x^2$; b) $x + y = x^3$; c) $x + y = x^4$; d) $x + y = y^2$; e) $x + y = y^3$; f) $x + y = y^4$.

Capitolul VI
PROBLEME PENTRU CONCURSURI

1. Determinați cel mai mare număr natural format din cifre distincte cu proprietatea că numărul format din oricare două cifre alăturate în ordinea în care sunt scrise (în numărul ce trebuie determinat) este divizibil cu: a) 2; b) 4; c) 7.

2. Să se determine numărul elementelor mulțimii $A = \{\overline{abc} \mid 8a + 10b = 18c\}$.

3. Să se determine numerele de trei cifre identice care divid numărul ce reprezintă suma tuturor numerelor naturale de trei cifre ce conțin cifra nenulă a exact de două ori.

4. Să se determine numerele naturale $\overline{xyz}$ cu proprietatea $\overline{xyz} = z^3 + z^2 + z$.

5. Fie $n \in \mathbf{N}$ astfel încât numerele $n + 2$ și $2n + 6$ nu sunt divizibile cu 3. Să se determine cifra a pentru care $5n + a$ este număr divizibil cu 3.

6. Să se determine tripletele formate din trei numere naturale consecutive fiecare de câte trei cifre, care sunt divizibile respectiv cu 5, 4, 3.

7. Să se determine cel mai mare număr natural care divide orice număr natural de forma $a = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$, unde $n \in \mathbf{N}$.

8. Să se determine cel mai mic număr natural nenul a cu proprietatea că $\overline{a425}$ este multiplu al lui 425.

9. Fie A mulțimea tuturor numerelor de 103 cifre care au suma cifrelor egală cu 103.
a) Să se determine cel mai mic element din A.
b) Dacă $a \in A$ și a are 14 cifre de 6, să se determine numărul minim de cifre nule ale lui a.

10. a) Să se determine numerele naturale n pentru care avem $\overline{ab} \cdot \overline{ab} = \overline{nab}$.
b) Aceeași problemă pentru $\overline{abc} \cdot \overline{abc} = \overline{nabc}$.

11. Să se determine $n \in \mathbf{N}^*$ dacă $1103^{1103} - 8^n = 9997$.

12. Criterii de divizibilitate
Fie $A = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0}$, $n \geq 3$.
a) Fie $d \in \{7, 11, 13\}$. Avem $d \mid A \Leftrightarrow d \mid \left| \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_3} - \overline{a_2 a_1 a_0} \right|$.
b) Fie $d \in \{3, 7, 19\}$. Avem $d \mid A \Leftrightarrow d \mid \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2} + 4 \cdot \overline{a_1 a_0}$.
c) $11 \mid A \Leftrightarrow d \mid A \Leftrightarrow d \mid |(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots)|$

13. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „Pentru orice număr natural $n \geq 3$„ numărul $(n - 2)(n + 1) + 19$ este număr prim”.

14. Fie a produsul primelor 101 numere prime. Să se determine ultimele două cifre ale numărului: a) 25^a; b) 5^a; c) 7^a.

15. Determinați toate perechile de numere prime (x, y) știind că x – y și x + y sunt numere prime.

16. a) Determinați 9 numere naturale consecutive și neprime.
b) Generalizare.

17. Să se determine cel mai mare număr natural n pentru care există exact n numere prime impare consecutive.

18. Demonstrați că există cel puțin 3 perechi (m, n) de numere naturale pentru care numerele $3^m + n$ și $3^n + m$ sunt simultan numere prime.

19. Demonstrați că există cel puțin 7 triplete de numere prime (a, b, c) pentru care $A = a^3 + b^3 + c^3 - 1$ este număr prim.

20. Determinați 6 numere naturale consecutive dintre care 4 sunt numere prime.

21. Să se determine numerele prime m și n știind că $m^2 + n^2 + m + n = 86$.

22. Numerele a și b au exact câte 35 de divizori (naturali). Câți divizori poate avea produsul $a \cdot b$?

23. Să se determine mulțimea $A = \{n \in \mathbf{N}^* \mid$ n are exact patru divizori naturali a căror sumă este divizibilă cu 4$\}$.

24. a) Să se demonstreze că dacă numărul natural n are exact 105 divizori naturali, atunci n este pătrat perfect.
b) Generalizare.

25. Fie $a \in \mathbf{N}^*$. Să se determine $n \in \mathbf{N}^*$ știind că $[a, n] + (a, n) \leq a + n$.

26. Se consideră 101 numere naturale nenule din care cel puțin două sunt distincte, iar suma lor este 10201. Să se afle cel mai mare divizor comun al acestor numere.

27. a) Câte numere naturale de patru cifre sunt divizibile cu toate cifrele impare?
b) Câte numere naturale de trei cifre sunt divizibile cu toate cifrele pare?

28. Determinați cel puțin 29 numere de câte 5 cifre distincte diferite de 9 care sunt divizibile cu orice cifră a lor.

29. Să se determine numerele prime de 3 cifre care împărțite prin 5, 8, 12 dau același rest.

30. Să se determine cel mai mare număr natural prin care se poate simplifica fracția $\dfrac{2n+9}{2n-5}$, $n \in \mathbf{N}$.

31. Să se demonstreze că dacă fracția $\dfrac{x}{y}$ este ireductibilă, unde $x, y \in \mathbf{N}^*$, atunci și fracțiile $\dfrac{x+y}{xy}$ și $\dfrac{x-y}{xy}$ sunt ireductibile.

32. a) Să se demonstreze că mulțimea
$A = \left\{ \dfrac{1}{2n+1}, \dfrac{2}{2n+1}, \ldots, \dfrac{2n-1}{2n+1}, \dfrac{2n}{2n+1} \;\middle|\; n \in \mathbf{N}^* \right\}$ conține un număr par de fracții reductibile.
b) Dați exemple de mulțime A ce conține exact 6 fracții reductibile.

GEOMETRIE

NOȚIUNI TEORETICE

Problemele de geometrie pe care le veți întâlni în clasele gimnaziale pot fi împărțite în următoare categorii:

I) **propoziții** (probleme, teoreme) **ce trebuie demonstrate**: în principiu se cere să se verifice că o anumită figură are anumite proprietăți (care sunt indicate sau care trebuie găsite);

II) **probleme de construcție**: se solicită construirea unei anumite figuri cu anumite proprietăți;

III) **probleme de calcul** (lungimi de segmente, măsuri de unghiuri, arii, volume etc.).

În cele ce urmează sunt prezentate diferite metode de rezolvare a problemelor din prima categorie.

1. Congruența segmentelor

Pentru a demonstra că două segmente sunt congruente este suficient să se arate că:

- au aceeași lungime;
- sunt laturi într-un triunghi isoscel (diferite de bază);
- sunt laturi într-un triunghi echilateral;
- sunt laturi opuse ale unui paralelogram;
- sunt laturi neparalele într-un trapez isoscel;
- sunt diagonalele unui trapez isoscel;
- sunt înălțimile sau medianele corespunzătoare laturilor congruente într-un triunghi isoscel;
- sunt bisectoarele corespunzătoare laturilor congruente într-un triunghi isoscel;
- sunt linii importante într-un triunghi echilateral;
- sunt laturi omoloage în triunghiuri congruente;
- sunt înălțimi sau mediane (sau bisectoare) corespunzătoare laturilor (sau unghiurilor) congruente în triunghiuri congruente;
- sunt determinate de un punct de pe mediatoarea unui segment și capetele segmentului;
- reprezintă distanțele de la un punct de pe bisectoarea unui unghi la laturile unghiului;
- sunt raze în același cerc sau în cercuri congruente.

2. Mijlocul unui segment

Pentru a demonstra că un punct este mijlocul unui segment este suficient să arătăm că:

- este punctul în care mediatoarea segmentului intersectează segmentul;
- este piciorul medianei unui triunghi;
- este punctul de intersecție al diagonalelor unui paralelogram (sau dreptunghi, sau pătrat, sau romb).

3. Congruența a două unghiuri

Pentru a demonstra că două unghiuri sunt congruente este suficient să arătăm că:

- au aceeași măsură;
- sunt unghiuri opuse la vârf;
- sunt unghiuri formate de bisectoarea unui unghi cu laturile unghiului;

- sunt unghiuri ale unui triunghi echilateral;
- sunt unghiurile de la bază ale unui triunghi isoscel;
- sunt unghiuri opuse într-un paralelogram;
- au acelaşi unghi complementar;
- sunt unghiuri cu acelaşi suplement;
- sunt unghiurile alăturate unei baze într-un trapez isoscel;
- sunt unghiuri alterne interne (sau alterne externe, sau corespondente) formate de două drepte paralele tăiate de o secantă;
- sunt unghiurile corespunzătoare laturilor congruente din două triunghi congruente;
- sunt unghiuri cu laturile paralele (ambele ascuțite sau ambele obtuze);
- sunt unghiuri cu laturile perpendiculare (ambele ascuțite sau ambele obtuze).

4. Drepte perpendiculare

Pentru a demonstra că două drepte sunt perpendiculare este suficient să demonstrăm că:
- măsura unui unghi format de cele două drepte este de 90°;
- una reprezintă înălțimea (sau mediatoarea) într-un triunghi, iar cealaltă reprezintă latura corespunzătoare;
- una este paralelă cu a treia dreaptă, iar alta este perpendiculară pe a treia dreaptă: $a \parallel b$, $b \perp c \Rightarrow a \perp c$;
- reprezintă catete într-un triunghi dreptunghic;
- reprezintă laturi alăturate într-un dreptunghi (sau pătrat);
- reprezintă diagonalele unui romb (sau pătrat);
- reprezintă o linie importantă într-un triunghi echilateral, iar cealaltă latura corespunzătoare;
- sunt paralele cu alte două drepte perpendiculare între ele;
- sunt bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare.

5. Drepte paralele

Pentru a demonstra că două drepte sunt paralele este suficient să demonstrăm că:
- dreptele nu se intersectează;
- sunt paralele cu o a treia dreaptă;
- sunt perpendiculare pe o a treia dreaptă;
- distanța dintre ele este constantă;
- sunt laturi opuse într-un paralelogram (pătrat, romb, dreptunghi);
- sunt bazele unui trapez;
- una reprezintă linia mijlocie într-un triunghi, iar cealaltă latura corespunzătoare;
- dacă sunt tăiate de o secantă se formează unghiuri alterne interne congruente, sau alterne externe congruente sau corespondente congruente, sau interne (sau externe) de aceeaşi parte a secantei suplementare.

6. Triunghi isoscel

Pentru a demonstra că un triunghi este isoscel este suficient să demonstrăm că:
- are două laturi congruente;
- are două unghiuri congruente;
- are două înălțimi congruente;
- are două mediane congruente;
- are două bisectoare congruente;

Capitolul I
DREAPTA

1. Fie punctele distincte A, B, C, D, E. Să se determine numărul dreptelor distincte determinate de aceste puncte.

2. Se consideră n puncte distincte, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$. Să se determine numărul minim şi numărul maxim de drepte distincte determinate de aceste puncte, ştiind că nu toate sunt coliniare.

3. Fie A, B, C puncte distincte coliniare. Să se arate că:
$(AB + BC - AC) \cdot (AB + AC - BC) \cdot (AC + BC - AB) = 0$.

4. Fie A, B, C, D puncte coliniare în această ordine. Să se demonstreze că:
a) $AC + BD = AD + BC$; b) $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$.

5. Fie punctele A, B, C, D astfel încât $C, D \in (AB)$ şi $AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Să se demonstreze că $D = C$.

6. Fie punctele A, B, C, D coliniare, în această ordine. Să se demonstreze că $AC + BD = 2 \cdot MN$, unde M şi N sunt mijloacele segmentelor (AB) şi (CD).

7. Fie punctele A, B, C, D coliniare. Să se stabilească ordinea punctelor A, B, C, D pe dreapta d = AB dacă $AB = a$, $AC = b$, $BD = c$, $BC = a + b$, $CD = a + b - c$.

8. Fie punctele A, B, C, D coliniare în această ordine. Să se demonstreze că $\frac{AD}{AB} + \frac{BC}{CD} = BD \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} \right)$.

9. Fie punctele distincte A, B, C pe dreapta d. Fie M mijlocul segmentului (AB). Să se determine lungimea segmentului (CM) dacă $AC = a$, $BC = b$.

10. Fie punctele coliniare distincte A, B, C şi fie M, N, P mijloacele segmentelor (AB),(BC), respectiv (AC). Să se demonstreze că segmentele (MN) şi (BP) au acelaşi mijloc.

11. Fie A, B, C, D puncte coliniare distincte în această ordine. Fie M, N, P, R mijloacele segmentelor (AB), (BC), (CD), (DA). Să se demonstreze că segmentele (MP) şi (NR) au acelaşi mijloc.

12. Fie punctele coliniare distincte O, A, B, C în această ordine, Fie M, N, P mijloacele segmentelor (BC), (CA), respectiv (AB). Să se afle valoarea raportului $\frac{OM + ON + OP}{OA + OB + OC}$.

13. Fie punctele $C, D \in (AB)$, $C \neq D$, astfel încât $AC \cdot AD = BC \cdot BD$. Să se calculeze $\frac{AC}{BD} + \frac{AD}{BC}$.

SOLUŢII

ALGEBRĂ

Capitolul I. NUMERE NATURALE. DIVIZIBILITATE

1. Numerele nu pot avea decât câte 3 cifre. Din $\overline{abc}+\overline{xyz}=733$ şi $\overline{cba}+\overline{zyx}=337$, notând $a + x = A$, $b + y = B$, $c + y = C$ rezultă $100A + 10B + C = 733$, $100C + 10B + A = 337$. Prin scădere rezultă $A – C = 4$, $101C + 10B = 333$ şi deci $B = 3$, $C = 3$, $A = 7$. În final se obțin numerele 302 şi 431.

2. $\overline{ab2}+\overline{xy3}=\overline{2ba}+\overline{3yx} \Leftrightarrow 99(a + x) = 495 \Leftrightarrow a + x = 5$. Perechile (a, x) sunt (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1). Cum b şi y reprezintă orice cifră, problema are $4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$ soluții.

3. a) $10^2 = 6^2 + 8^2$; b) $10^3 = 100 \cdot (1 + 9) = 10^2 + 30^2$; c) $10^{2n} = 10^{2n–2}(6^2 + 8^2) = (6 \cdot 10^{n–1})^2 + (8 \cdot 10^{n–1})^2$; d) $10^{2n+1} = 10^{2n} \cdot (1 + 9) = (10^n)^2 + (3 \cdot 10^n)^2$.

4. a) $25^2 = 15^2 + 20^2$; b) $25^3 = 25^2 \cdot (3^2 + 4^2) = (3 \cdot 25)^2 + (4 \cdot 25)^2$; c) $25^{2n} = 25^{2n–2} \cdot (15^2 + 20^2) = (15 \cdot 25^{n–1})^2 + (20 \cdot 25^{n–1})^2$; d) $25^{2n+1} = 25^{2n} \cdot (3^2 + 4^2) = (3 \cdot 25^n)^2 + (4 \cdot 25^n)^2$.

5. a) $3 \cdot (10^{30} – 1) = 3 \cdot \underbrace{999....9}_{30} = \underbrace{2999....997}_{31} \Rightarrow$ 29 cifre de 9; b) $4 \cdot (10^{50} – 3) = 4 \cdot \underbrace{999....97}_{50} = \underbrace{3999....9988}_{51} \Rightarrow$ 48 cifre de 9; c) $5 \cdot (10^n – 1) = \underbrace{499....995}_{n+1} \Rightarrow n – 1$ cifre de 9; d) $8 \cdot (10^n – 1) = \underbrace{799....992}_{n+1} \Rightarrow n – 1$ cifre de 9.

6. a) $2^6 + 2^7 + 2^6 = 2^6 \cdot 4 = 2^8 = (2^4)^2 \Rightarrow n = 6$. Se arată că 6 este unica soluție.
b) $2^{2a} + 2^{2a+1} + 2^{2a} = 2^{2a} \cdot 4 = 2^{2a+2} = (2^{a+1})^2$. Se arată că $m = 2a$, $n = 2a$, $a \in \mathbf{N}^*$.

7. $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} = 2^n \cdot 15$; $2^n \cdot 15 > 100 \Leftrightarrow n \geq 3$; $2^n \cdot 15 < 200 \Rightarrow n \leq 3$. Soluția este $n = 3$.

8. $3(2a + 3b + 4c) – (5a + 4b + 3c) = 3 \cdot 29 – 34 \Rightarrow a + 5b + 9c = 53$; $4(2a + 3b + 4c) – 3(5a + 4b + 3c) = 4 \cdot 29 – 3 \cdot 34 \Rightarrow c – a = 2 \Rightarrow (a + 5b + 9c)(c – a) = 106$.

9. $n = 19a + b$, $b < 19$ şi $n = 13b + a$, $a < 13 \Rightarrow 3a = 2b$. Deoarece $b < 19$, $a < 12$, pentru (a, b) avem soluțiile (0, 0), (2, 3), (4, 6), (6, 9), (8, 12), (10, 15), (12, 18). Rezultă că $n \in \{0, 41, 82, 123, 164, 205, 246\}$.

10. $1000a + 110b + c = 111a + 12b + 1773 \Rightarrow 889a + 98b + c = 1773$. Dacă $a \geq 2$ avem $889a + 98b + c \geq 1778 > 1773$. Rezultă că $a = 1$ şi deci $98b + c = 884$. Avem $98b \geq 884 – 9$ şi deci $b = 9$. Obținem $\overline{abbc} = 1992$

11. $4(10n + 6) = n + 60000 \Rightarrow n = 15384$.

12. $k^2 = \overline{xy}+\overline{yx} = 11(x + y) \Rightarrow x + y = 11n^2$. Cum $x + y \leq 18$ rezultă că $x + y = 11$ şi deci $\overline{xy} \in \{29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92\}$.

13. $a = \underbrace{100...0}_{11}\underbrace{99...95}_{10} \Rightarrow$ suma cifrelor lui a este 87; $b = \underbrace{1000...0}_{n+1}\underbrace{99...95}_{n} \Rightarrow$ suma cifrelor lui a este $9n – 3$.

14. $\overline{abc} = 3 \cdot \overline{cba} \Rightarrow 97a = 299c + 20b \Rightarrow a \geq 3c + 1$. Dacă $a = 3c + 1$ rezultă $97 = 8c + 20b$. Dacă $a = 3c + 2$ rezultă $20b + 8c = 194 \Rightarrow c \in \{3, 8\} \Rightarrow b \notin \mathbf{N}$. Analog se arată că nici în cazurile $a \in \{3c + 3, 3c + 4, 3c + 5, 3c + 6\}$ nu avem soluție.

15. a) $111222 = 333 \cdot 334$; b) $11111122222 = 33333 \cdot 33334$; c) Fie $\underbrace{111...1}_{n}\underbrace{222...2}_{n} = 10^n \cdot a +$

$+ 2a = \left(\underbrace{999....9}_{n} + 1\right)a + 2a = (9a + 1)a + 2a = 9a^2 + 3a = 3a(3a + 1)$.

16. Vom nota cu u(n) ultima cifră a oricărui număr $n \in \mathbf{N}^*$. Avem $a = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^4(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \ldots + 3^{4n-4}(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) = 120(3 + 3^4 + \ldots + 3^{4n-4}) \Rightarrow u(a) = 0$.

17. $\overline{mab} + \overline{nab} = \overline{pab} \Rightarrow (100m + x)(100n + x) = 100p + x$, unde $x = \overline{ab} \Rightarrow 10000mn + 100(m + n) + x^2 = 100p + x \Rightarrow u(x^2 - x) = 0$. Luăm $x \in \{25, 76\}$.

18. a) $y = x^2 - x \le 9 \Rightarrow x \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow \overline{xy} \in \{10, 22, 36\}$; b) $y = x^3 - x \le 9 \Rightarrow x \in \{1, 2\} \Rightarrow \overline{xy} \in \{10, 26\}$; c) $y = x^4 - x \le 9 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \overline{xy} = 10$; d) $x = y^2 - y \le 9 \Rightarrow y \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow \overline{xy} \in \{22, 63\}$; e) $x = y^3 - y \le 9 \Rightarrow y \in \{1, 2\} \Rightarrow \overline{xy} = 62$; f) $x = y^4 - y \le 9 \Rightarrow y = 1, x = 0$ (fals).

19. $\overline{xy} = 11$.

20. $a = 8^{30} - 7 \cdot 8(1 + 8 + 8^2 + \ldots + 8^{28}) - 1 = 8^{30} - 8(8^{29} - 1) - 1 = 7$; $b = 9^{1000} - 8 \cdot 9(1 + 9 + 9^2 + \ldots + 9^{28}) - 1 = 9^{100} - 9(9^{99} - 1) - 1 = 8$.
Generalizare: $A = x^n - (x - 1)x^{n-1} - (x - 1)x^{n-2} - \ldots - (x - 1)x - 1 = x^n - (x - 1)x \cdot (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-2}) - 1 = x^n - x(x^{n-1} - 1) - 1 = x - 1$, unde $x \in \mathbf{N}$, $n \ge 2$, $n \in \mathbf{N}^*$.

21. Dacă $\overline{abacc} = n(n + 1)(n + 2) \Rightarrow n = \overline{xy}$, $x \ge 2$, $x \le 4$. Obținem $n = 22$; $22 \cdot 23 \cdot 24 = 12144$.

22. $a^{b+c} + a^b + a^c + 1 = 820 \Leftrightarrow (a^b + 1)(a^c + 1) = 2^2 \cdot 5 \cdot 41$. Fie $a^b + 1 = x$, $a^c + 1 = y$. Din $(x, y) \in \{(2, 420), (4, 205), (5, 164), (10, 82), (20, 41), (41, 20), (82, 10), (164, 5), (205, 4)\}$ rezultă $x = 10$, $y = 82$ sau $x = 82$, $y = 10 \Rightarrow \overline{abc} \in \{324, 342\}$.

23. Presupunem că n are 2k cifre, $k \in \mathbf{N}^*$. Deoarece $5n < 10n$ şi 10n are $2k + 1$ cifre, rezultă că 5n are 2k cifre sau $2k + 1$ cifre. Cum n şi 5n au împreună un număr par de cifre, rezultă că 5n are tot 2k cifre. Dacă prima cifră a lui n este cel puțin egală cu 2, atunci 5n are $2k + 1$ cifre. Rezultă că prima cifră a lui n este 1. Analog se arată că prima cifră a lui n este 1 dacă n are $2k + 1$ cifre, $k \in \mathbf{N}$.

24. Analog cu 23.

25. a) $S(n) = a(1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{111...1}_{n}) = \dfrac{a}{9}(9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{999...9}_{n}) = \dfrac{a}{9}[(10 - 1) + (10^2 - 1) + \ldots + (10^n - 1)] = \dfrac{a}{9}[10(1 + 10 + \ldots + 10^{n-1}) - n] = \dfrac{a}{9} \cdot \dfrac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9}$.

b) $S(1) = a$; $S(2) = 12a$; $S(3) = 123a$ etc.

26. Dacă $u(n) \in \{1, 3, 6, 8\}$, atunci $u(2n + 1) \in \{3, 7\}$ şi $2n + 1$ nu este pătrat perfect. Dacă $u(n) \in \{2, 4, 7, 9\}$, atunci $u(3n + 1) \in \{7, 3, 2, 8\}$ şi $3n + 1$ nu este pătrat perfect. Rămâne $u(n) \in \{0, 5\}$ şi restul împărțirii lui n la 5 este 0.

27. Dacă $n = 2k + 3$, atunci $2^n + 4^k = 2^{2k+3} + 2^{2k} = 2^{2k} \cdot 9 = (3 \cdot 2^k)^2$. Există şi alte soluții?

28. Fie $a < b < c$. Atunci există $x, y \in \mathbf{N}^*$, $x < y$, astfel încât $b = a + x$, $c = a + y$. Rezultă că $13 \cdot 3^n = 3^a(1 + 3^x + 3^y)$, de unde $x = 1$, $y = 2$, $n = a$. Obținem $b = a + 1$, $c = a + 2$ şi deci $a + c - 2b = 0$, de unde $A = 0$. Analog obținem $A = 0$ în cazurile $a < c < b$, $b < a < c$, $b < c < a$, $c < a < b$, $c < b < a$. Dacă $a = b < c$, fie $c = a + x$, $x \in \mathbf{N}^*$. Obținem $3^a(2 + 3^c) = 13 \cdot 3^n$, care nu are soluție în numere naturale etc.

$$= \frac{2^{n+1}-1}{2^n}\cdot\frac{3^{n+2}-1}{2\cdot 3^n} = \frac{2^{n+1}\cdot 3^{n+2}-3^{n+2}-2^{n+1}+1}{2^{n+1}\cdot 3^{n+1}},\ D = \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}}\cdot\frac{3^{n+1}-1}{2\cdot 3^n} = \frac{2^{n+2}\cdot 3^{n+1}-3^{n+1}-2^{n+2}+1}{2^{n+2}\cdot 3^n}.$$

Avem $\frac{C}{D} = \frac{3\cdot 6^{n+1}-3^{n+2}-2^{n+1}+1}{2^{n+1}\cdot 3^{n+1}}\cdot\frac{2^{n+2}\cdot 3^n}{2\cdot 6^{n+1}-3^{n+1}-2^{n+2}+1} = \frac{(3\cdot 6^{n+1}-3^{n+2}-2^{n+1}+1)\cdot 2}{(2\cdot 6^{n+1}-3^{n+1}-2^{n+2}+1)\cdot 3} < 1$

$\Leftrightarrow 6^{n+2} - 2\cdot 3^{n+2} - 2^{n+2} + 2 < 6^{n+2} - 3^{n+2} - 3\cdot 2^{n+2} + 3 \Leftrightarrow 2^{n+3} < 3^{n+2} + 1$. Pentru $n \in \{2, 3\}$ inegalitatea se verifică. Fie $n = k + 3$, $k \in \mathbf{N}^*$. Avem $2^{n+3} = 2^{k+6} = 2^3 \cdot 2^{k+3} = 8 \cdot 2^{k+3} < 9 \cdot 2^{k+3} < 9 \cdot 3^{k+3} = 3^{n+2} < 3^{n+2} + 1$.

197. Avem $\frac{a(a+b)}{c} = \frac{b(b+c)}{a} = \frac{c(c+a)}{b} \Leftrightarrow a^2b(a + b) = b^2c(b + c) = c^2a(c + a) \Leftrightarrow a^3b + a^2b^2 = b^3c + b^2c^2 = c^3a + c^2a^2$. Dacă $0 < a \le b \le c$ avem $a^3b + a^2b^2 \le b^3c + b^2c^2$. Obținem $a = b = c$ și atunci $A = \frac{a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2}}{a^{n+4}+b^{n+4}+c^{n+4}} = \frac{3a^{n+2}}{3a^{n+4}} = \frac{1}{a^2}$. Luăm $a = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbf{N}^*$.

198. Deoarece $a^2 \ge 0$, $b^2 \ge 0$, $c^2 \ge 0$, avem $a^2 \le 64$ și deci $a \le 8$. Presupunem $a \ge b \ge c$. Atunci $a^3 + b^3 + c^3 \le a^3 + ab^2 + ac^2 = a(a^2 + b^2 + c^2) \le 8 \cdot 64 = 512$.

199. Tripletele $(1, n, n)$, $(n, 1, n)$, $n \in \mathbf{Z}$ sunt soluții. Demonstrați că nu mai sunt alte soluții.

200. $(1, n, n)$, $(n, 1, n)$, $(n, -n, 0)$, $n \in \mathbf{Z}$ sunt soluții.

GEOMETRIE

Capitolul I. DREAPTA

1. Dacă oricare trei puncte nu sunt coliniare obținem numărul maxim de drepte, anume $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. În cazul a n puncte, $n \ge 2$, numărul maxim este $1 + 2 + \ldots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Dacă avem $B \in AC$, $D \notin AC$, $E \notin AC$, avem 8 drepte: AB, AD, AE, BD, BE, CD, CE, DE. Dacă A, B, C, D sunt coliniare și $E \notin AB$, avem 5 drepte: AB, AE, BE; CE, DE. Dacă toate punctele sunt coliniare, avem o singură dreaptă.

2. Dacă oricare 3 puncte nu sunt coliniare avem $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte. Dacă $n - 1$ puncte sunt coliniare și unul nu este pe această dreaptă avem $1 + (n - 2) = n - 1$ drepte.

3. Pentru oricare așezare a punctelor A, B, C pe dreaptă, una din paranteze este nulă și deci produsul este nul. De exemplu, pentru $C \in (AB)$ avem $AC + CB - AB = 0$.

4. Conform fig. 1 avem:

a) $AC + BD = (AB + BC) + (BC + CD) = (AB + BC + CD) + BC = AD + BC$.

b) Fie $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. Avem $AC = a + b$, $BD = b + c$, $AD = a + b + c$. Atunci $AD \cdot BC + AB \cdot CD = (a + b + c) \cdot b + ac = ab + b \cdot (b + c) + ac = a(b + c) + b(b + c) = (a + b)(b + c) = AC \cdot BD$.

Fig. 1

5. Presupunem ordinea A – C – D – B (fig. 2).
Notăm $AC = a$, $CD = b$, $BD = c$. Atunci $AC \cdot BD = AD \cdot BC \Leftrightarrow ac = (a + b)(b + c) \Leftrightarrow ac = ab + ac + b^2 + bc \Leftrightarrow b(a + b + c) = 0$ (fals).

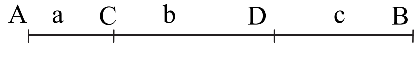

Fig. 2

Dacă avem $D \in (AC)$ (fig. 3), atunci: $AC \cdot BD = AD \cdot BC \Leftrightarrow (a + b)(b + c) = ac \Leftrightarrow b(a + b + c) = 0$ (fals). Rămâne $b = 0$, adică $C = D$.

Fig. 3

6. Fie $AB = 2a.D = 2b$, $CB = 2x$ (fig. 4)
Avem $AC + BD = 2(a + x) + 2(b + x) = 2(a + b + 2x) = 2 \cdot MN$.

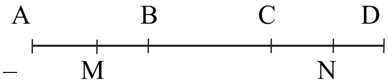

Fig. 4

7. $AB = a$, $AC = b$, $BC = a + b \Rightarrow A \in (BC)$; $CD = a + b - c$, $BD = c \Rightarrow D \in (BA)$. Ordinea este C – A – D – B (sau B – D – A – C).

8. $\frac{AD}{AB} + \frac{BC}{CD} = \frac{BD}{AB} + \frac{BD}{CD} \Leftrightarrow \frac{AD - BD}{AB} = \frac{BD - BC}{CD} \Leftrightarrow \frac{AB}{AB} = \frac{CD}{CD}$.

9. Dacă $A \in (CB)$ (fig. 5), avem: $CM = CB - MB = CB - \frac{AB}{2} = \frac{2CB - AB}{2} = \frac{CB + (CB - AB)}{2} = \frac{CA + CB}{2} = \frac{a + b}{2}$.

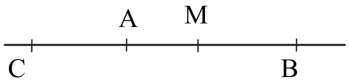

Fig. 5

Analog, pentru $B \in (AC)$ avem $CM = \frac{a + b}{2}$.

Dacă $C \in (AM)$ (Fig. 6), avem $CM = MA - CA = \frac{AB}{2} - AC = \frac{(AB - AC) - AC}{2} = \frac{CB - CA}{2} = \frac{b - a}{2}$.

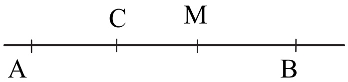

Fig. 6

Dacă $C \in (MB) \cup \{M\}$, avem $CM = \frac{b - a}{2}$. În toate cazurile avem $CM = \frac{|a \pm b|}{2}$.

10. Se analizează cazurile $C \in (AB)$, $B \in (AC)$, $A \in (BC)$.
I. Luăm cazul $B \in (AC)$, $P \in (AB)$ (Fig. 7). Notăm $AM = BM = a$, $BN = CN = b$, $AC = 2(a + b)$, $AP = CP = a + b$.

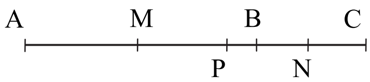

Fig. 7

Dacă Q este mijlocul lui (MN) avem $MQ = \frac{a+b}{2}$, $AQ = a + \frac{a + b}{2} = \frac{3a + b}{2}$. Dacă R este mijlocul lui (BP), avem $PR = \frac{a + b}{2}$, $AR = \frac{3a + b}{2}$.
II. Luăm apoi cazul $B \in (AC)$, $P \in [BC]$.

11. Fie punctul O astfel încât $A \in (OB)$ (Fig. 8). Conform problemei 9) avem $MN = ON - OM = \frac{OC + OB}{2} - \frac{OA + OB}{2} = \frac{OC - OA}{2} = \frac{AC}{2} = PR$. Atunci (MN) şi (PR) au acelaşi mijloc.

Fig. 8

12. Avem $OP = OA + AP = OA + \frac{AB}{2} = \frac{AB + OA + OA}{2} = \frac{OA + OB}{2}$, $ON = \frac{OA + OC}{2}$, $OM = \frac{OB + OC}{2}$

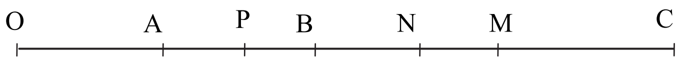

Fig. 9

şi atunci $\frac{OM + ON + OP}{OA + OB + OC} = \frac{OA + OB + OC}{OA + OB + OC} = 1$.

13. Presupunem $C \in (AD)$ (Fig. 10). Din $AC \cdot AD = BC \cdot BD$, rezultă că $AC \cdot (AB - BD) = (AB - AC) \cdot BD \Leftrightarrow$

Fig. 10

Cuprins