$\Delta < 0$	Nu se descompune.
$\Delta = 0$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, unde $x_0 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta > 0$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, unde $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

- *Semnul funcției de gradul II*. În funcție de valorile lui Δ distingem cazurile:

$\Delta < 0$	x	$-\infty$					$+\infty$
	$f(x)$	semnul lui a					
$\Delta = 0$	x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$			$+\infty$
	$f(x)$	semnul lui a		0		semnul lui a	
$\Delta > 0$	x	$-\infty$	x_1		x_2		$+\infty$
	$f(x)$	semnul lui a	0	semn **contrar** lui a	0	semnul lui a	

- *Extremul funcției de gradul II. Monotonia funcției de gradul II.*
  1. Dacă $\boxed{a < 0}$, atunci funcția are un maxim în punctul $-\frac{b}{2a}$, valoarea maximă este

$-\frac{\Delta}{4a}$, funcția este strict crescătoare pe $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ şi strict descrescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$.

2. Dacă $\boxed{a > 0}$, atunci funcția are un minim în punctul $-\frac{b}{2a}$, valoarea minimă este $-\frac{\Delta}{4a}$, funcția este strict descrescătoare pe $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ şi strict crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$.

- *Graficul*: este o parabolă care are $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

9. Funcția exponențială (de bază *a*)

$f:\mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x)=a^x$, unde $a > 0$, $a \neq 1$.

- *Rezolvarea ecuației* $a^x = b$, unde $a > 0$, $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$.
  1. Dacă $b \leq 0$, atunci ecuația nu admite soluții, deci $x \in \varnothing$.
  2. Dacă $b > 0$, atunci ecuația admite soluția unică $x = \log_a b$.

- *Semnul funcției exponențiale*: $f(x) = a^x > 0$ (este strict pozitivă), $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.
- *Monotonia*:

  Pentru $a > 1 \Rightarrow f$ este strict crescătoare, adică pentru $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$.

  Pentru $a \in (0, 1) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare, adică pentru $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$.
- *Graficul* funcției exponențiale trece prin punctul $P(0, 1)$, adică $a^0 = 1$, $(\forall)\ a > 0$, $a \neq 1$.

Observație. Funcția exponențială de bază a este bijectivă, deci inversabilă, inversa acesteia este *funcția logaritmică* de bază a.

10. Funcția logaritmică (de bază *a*)

$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$, unde $a > 0$, $a \neq 1$.

Observație

Dacă $a = e \simeq 2{,}7182$, atunci $\log_e$ se notează ln.
Dacă $a = 10$, atunci $\log_{10}$ se notează lg.

- *Rezolvarea ecuației* $\log_a x = b$, unde $a > 0$, $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$. Ecuația are soluție unică $x = a^b$, $(\forall)\ b \in \mathbb{R}$.
- *Semnul funcției logaritmice*:

$a \in (0, 1)$	x	$0 \qquad 1 \qquad +\infty$
	$\log_a x$	$\mid\ +\ +\ +\ 0\ -\ -\ -$
$a \in (1, \infty)$	x	$0 \qquad 1 \qquad +\infty$
	$\log_a x$	$\mid\ -\ -\ -\ 0\ +\ +\ +$

- *Monotonia*: Este strict crescătoare (pe $(0, \infty)$) dacă $a > 1$ şi strict descrescătoare (pe $(0, \infty)$) dacă $a \in (0, 1)$.

Proprietățile logaritmilor: Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, atunci:

- $a^{\log_a x} = x$, $(\forall)\ x > 0$; $\log_a a^x = x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$;

  $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$;
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$,

  $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $(\forall)\ x, y > 0$;
- $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$, $\log_a \dfrac{1}{x} = -\log_a x$;

  $\log_{a^m} x = \dfrac{1}{m} \cdot \log_a x$, $(\forall)\ x > 0$;
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$; $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$, $(\forall)\ a, b > 0$,

  $a, b \neq 1$.
- *Graficul* funcției logaritmice trece prin punctul $P(1, 0)$, adică $\log_a 1 = 0$, $(\forall)\ a > 0$, $a \neq 1$.

<u>Observație</u>. În ecuații sau exercițiile în care apar expresii de forma: $\log_{A(x)} B(x)$ se impun condițiile de existență: $\begin{cases} A(x) > 0 \\ A(x) \neq 1 \\ B(x) > 0 \end{cases}$.

11. Elemente de combinatorică

Se numeşte **mulțime ordonată**, o mulțime împreună cu o ordine bine determinată de dispunere a elementelor sale.

Permutări de n elemente, notate cu P_n, reprezintă numărul mulțimilor ordonate formate cu elementele unei mulțimi cu n elemente. Numărul permutărilor de n elemente este de

$$\boxed{P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-2)\cdot (n-1)\cdot n \overset{\text{not}}{=} n!}.$$

Prin convenție $0! = 1$.

Aranjamente de n elemente luate câte k, notate A_n^k, reprezintă numărul submulțimilor **ordonate** formate cu k elemente din elementele unei mulțimi cu n elemente. Numărul aranjamentelor de n luate câte k este

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}},\ n, k \in \mathbb{N},\ 0 \le k \le n.$$

Combinări de n elemente luate câte k, notate C_n^k, reprezintă numărul submulțimilor cu k elemente ale unei mulțimi cu n elemente. Numărul combinărilor de n luate câte k este

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}},\ n, k \in \mathbb{N},\ 0 \le k \le n.$$

Proprietăți:

- $C_n^k = C_n^{n-k}$; $C_n^0 = C_n^n = 1$
- $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$;
- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$;
- $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$.

Binomul lui Newton

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \\ &+ C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n\end{aligned}}$$

- Formula termenului general:
  $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$; C_n^k se numeşte coeficient binomial
- În dezvoltarea $(a + b)^n$ se obțin $n + 1$ termeni.
- Formula de recurență: $T_{k+2} = \dfrac{n-k}{k+1} \cdot \dfrac{b}{a} T_{k+1}$.

Fie A o mulțime finită cu $n \in \mathbb{N}^*$ elemente. Atunci:

- **numărul submulțimilor** lui A este 2^n;
- **numărul submulțimilor nevide** ale lui A este $2^n - 1$;
- **numărul submulțimilor cu *k* elemente**, unde $k \le n$, ale lui A este C_n^k .

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, A o mulțime finită cu n elemente şi B o mulțime cu m elemente. Atunci:

- **numărul funcțiilor** definite pe A cu valori în B este m^n;
- **numărul funcțiilor injective** definite pe A cu valori în B este A_m^n, dacă $m \geq n$ şi 0 în rest;
- **numărul funcțiilor bijective** definite pe A cu valori în B este $n!$, dacă $m = n$ şi 0 în rest.
- **numărul funcțiilor strict crescătoare** definite pe A cu valori în B este C_m^n, dacă $m \geq n$ şi 0 în rest, analog pentru funcțiile strict descrescătoare.

Probabilitatea unui eveniment

$$\boxed{P = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}}.$$

12. Numere complexe

Forma algebrică

Se numeşte **număr complex** (în formă algebrică), un număr z de forma $z = x + yi$, unde $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, x se numeşte **partea reală** a lui z şi se notează $\mathrm{Re}(z)$, iar yi se numeşte **partea imaginară** a lui z, y se numeşte **coeficientul părții imaginare** şi se notează $\mathrm{Im}(z)$. Mulțimea numerelor complexe se notează cu $\mathbb{C}$. Un număr complex se numeşte **pur imaginar** dacă este de forma yi, unde $y \in \mathbb{R}^*$ (este nenul şi partea reală este egală cu 0).

Dacă $z = x + yi$, unde $x, y \in \mathbb{R}$ este un număr complex, atunci se numeşte **conjugatul** lui z, numărul complex $\boxed{\bar{z} = x - yi}$, se numeşte **modulul** lui z, numărul real pozitiv $\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$.

Observaţie. **Două numere complexe sunt egale dacă şi numai dacă au atât partea reală cât şi cea imaginară egale**.

Fie $z_1 = x_1 + y_1 i$ şi $z_2 = x_2 + y_2 i$ două numere complexe, atunci:

- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

Operaţii cu numere complexe

- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$,

  $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$.
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) =$

  $= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$
- Dacă $z_2 \neq 0$, atunci

  $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

  $$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (-x_1 y_2 + x_2 y_1)i}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Puterile lui i:

$$i^n = \begin{cases} 1, \text{ dacă } n = 4k+0 \\ i, \text{ dacă } n = 4k+1 \\ -1, \text{ dacă } n = 4k+2 \\ -i, \text{ dacă } n = 4k+3 \end{cases} \quad \text{unde } k \in \mathbb{Z}$$

(0, 1, 2, 3 reprezintă de fapt restul împărțirii lui n la 4).

Proprietăți ale numerelor complexe:

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$; z este pur imaginar $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$;
- $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$, $(\forall)\ z \in \mathbb{R}$; $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}_+$, $(\forall)\ z \in \mathbb{C}$;
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$, $(\forall)\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $(\forall)\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $(\forall)\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$;
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, $(\forall)\ z \in \mathbb{C}$;
- $|z| \geq 0$, $(\forall)\ z \in \mathbb{C}$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|z| = |\bar{z}|$, $(\forall)\ z \in \mathbb{C}$;
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $(\forall)\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$; $|z^n| = |z|^n$, $(\forall)\ z \in \mathbb{C}$;
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $(\forall)\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$; $z_2 \neq 0$.

Forma trigonometrică

Reprezentarea numărului complex $z = a + bi$ sub forma:

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, se numeşte **forma trigonometrică** a lui z, α se numeşte **argumentul redus** a lui z şi se notează cu arg z,

$$\alpha = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, \text{dacă } a > 0, b > 0 \left(\text{CI}\right) \\ \pi - \operatorname{arctg}\left|\dfrac{\text{b}}{\text{a}}\right|, \text{dacă } a < 0, b > 0 \left(\text{CII}\right) \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, \text{dacă } a < 0, b < 0 \left(\text{CIII}\right) \\ 2\pi\text{-}\operatorname{arctg}\left|\dfrac{\text{b}}{\text{a}}\right|, \text{dacă } a > 0, b < 0 \left(\text{CIV}\right) \end{cases}$$

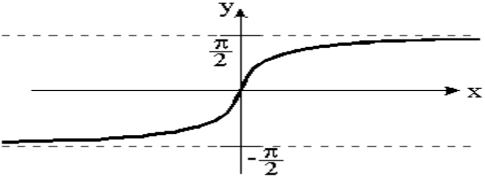
$$\alpha = \begin{cases} 0, \text{dacă } a > 0, b = 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{dacă } a = 0, b > 0 \\ \pi, \text{dacă } a < 0, b = 0 \\ \dfrac{3\pi}{2}, \text{dacă } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

- Fie $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ un număr complex. Atunci $\overline{z} = r\left[\cos\left(2\pi - \alpha\right) + i\sin\left(2\pi - \alpha\right)\right]$ *(conjugatul)*.

- *Tabel de valori*:

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$-\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

- *Graficul*:



4. $\operatorname{arcctg}:\mathbb{R}\to(0,\pi)$, $\operatorname{arcctg} x = y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y;\ y \in (0, \pi);$

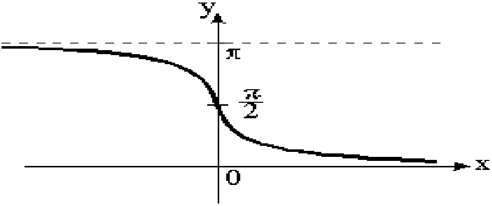
$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x,\ (\forall)x\in\mathbb{R},$

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x,\ (\forall)x\in(0,\pi);$

- $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x,\ (\forall)x\in\mathbb{R};$
- *Semnul*: este **strict pozitivă**;
- *Monotonia*: funcția arcctg este **strict descrescătoare**;
- *Tabel de valori*:

x	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$

- *Graficul*:



Soluțiile ecuațiilor trigonometrice fundamentale:

Ecuația	**Mulțimea soluțiilor**
$\sin x = a$	$S = \varnothing$,dacă $a \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$
	$S = \{(-1)^k \arcsin a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, dacă $a \in [-1,1]$
$\cos x = a$	$S = \varnothing$, dacă $a \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$
	$S = \{\pm \arccos a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, dacă $a \in [-1,1]$
$\operatorname{tg} x = a$	$S = \{\operatorname{arctg} a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $(\forall) a \in \mathbb{R}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$S = \{\operatorname{arcctg} a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $(\forall) a \in \mathbb{R}$

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Aritmetica în $\overline{\mathbb{R}}$

$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$$

$$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$$

$$x+(+\infty)=(+\infty)+x=+\infty\ ,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$$

$$x+(-\infty)=(-\infty)+x=-\infty\ ,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$$

$$x-(+\infty)=-\infty\ ,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$$

$$x-(-\infty)=+\infty\ ,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$$

$$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$$

$$(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$$

$$(+\infty)\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$$

$$x\cdot(+\infty)=\begin{cases}+\infty, \text{ dacă } x>0\\ -\infty, \text{ dacă } x<0\end{cases}$$

$$x\cdot(-\infty)=\begin{cases}-\infty, \text{ dacă } x>0\\ +\infty, \text{ dacă } x<0\end{cases}$$

$$\frac{x}{\pm\infty}=0\ ,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$$

$$\frac{(+\infty)}{x}=\begin{cases}+\infty, \text{dacă } x>0\\ -\infty, \text{dacă } x<0\end{cases}$$

$$\frac{(-\infty)}{x}=\begin{cases}-\infty, \text{dacă } x>0\\+\infty, \text{dacă } x<0\end{cases}$$

$$|\pm\infty|=+\infty$$

$$(+\infty)^{(+\infty)}=+\infty$$

$$(+\infty)^{(-\infty)}=0$$

$$0^{(+\infty)}=0$$

$$x^{(+\infty)}=\begin{cases}+\infty, \text{dacă } x>1\\0, \text{dacă } x\in(0,1)\end{cases}$$

$$x^{(-\infty)}=\begin{cases}0, \text{dacă } x>1\\+\infty, \text{dacă } x\in(0,1)\end{cases}$$

$$(+\infty)^{x}=\begin{cases}+\infty, \text{dacă } x>0\\0, \text{dacă } x<0\end{cases}$$

$$\sqrt[k]{(+\infty)}=+\infty,\ (\forall)k\in\mathbb{N},k\geq 2$$

$$\sqrt[2k-1]{(-\infty)}=-\infty,\ (\forall)k\in\mathbb{N},k\geq 2$$

$$\log_a(+\infty)=+\infty \text{, dacă } a>1$$

$$\log_a 0=-\infty \text{, dacă } a>1$$

$$\log_a(+\infty)=-\infty \text{, dacă } a\in(0,1)$$

$$\log_a 0=+\infty \text{, dacă } a\in(0,1)$$

Operații fără sens (nedeterminări)

$\infty-\infty$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\frac{0}{0}$	$0\cdot(\pm\infty)$
0^0	$(\pm\infty)^0$	$1^{\pm\infty}$	

22. Şiruri de numere reale

Monotonia şirurilor:

- un şir $(a_n)_n$ este ***strict crescător***, dacă există $n_1\in\mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice $n\geq n_1$, $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n<a_{n+1}$.
- un şir $(a_n)_n$ este ***strict descrescător***, dacă există $n_1\in\mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice $n\geq n_1$, $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n>a_{n+1}$.
- un şir $(a_n)_n$ este ***crescător***, dacă există $n_1\in\mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice $n\geq n_1$, $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n\leq a_{n+1}$.
- un şir $(a_n)_n$ este ***descrescător***, dacă există $n_1\in\mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice $n\geq n_1$, $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n\geq a_{n+1}$.
- un şir este ***strict monoton*** dacă este strict crescător sau strict descrescător.

$\frac{1}{(x+a)^n}$	$-\frac{1}{(n-1)(x+a)}$	$\int \frac{1}{(x+2)^2}\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{x+2} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	
$\frac{1}{x \pm a}$	$\ln\lvert x \pm a\rvert$	$\int \frac{1}{x-12}\,\mathrm{dx} = \ln\lvert x-12\rvert + C$
x^{α}	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$, $a \neq 0$	$\int \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$
$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$, $a > 0$	$\int \frac{1}{x^2-9}dx = \frac{1}{6}\ln\left\lvert\frac{x-3}{x+3}\right\rvert + C$

$\frac{1}{\sqrt{x \pm a}}$	$2\sqrt{x \pm a}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x+3}} \mathrm{dx} =$ $= 2\sqrt{x+3} + C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a}$, $a > 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}} dx =$ $= \arcsin \frac{x}{4} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$, $a \neq 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5}} dx =$ $= \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 5}\right) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert$, $a > 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3}} dx =$ $= \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - 3}\right\rvert + C$
$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}$	$\sqrt{x^2 + a}$, $a \neq 0$	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}} dx =$ $= \sqrt{x^2 - 2} + C$
$\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$-\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$	$\int \frac{x}{\sqrt{3 - x^2}} dx =$ $= -\sqrt{3 - x^2} + C$
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	

$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\text{ctg}\, x$	
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\text{tg}\, x$	
$\text{tg}\, x$	$-\ln\lvert \cos x\rvert$	
$\text{ctg}\, x$	$\ln\lvert \sin x\rvert$	

Formula de integrare prin părți:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Formula Leibniz-Newton:

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă, iar $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui f pe $[a,b]$. Atunci: $\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = F(b)-F(a)}$.

<u>Observație</u>. Dacă *f* integrabilă pe [0, 1], atunci

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{dx}}$$

• Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$; diviziunea $\Delta = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a lui $[a, b]$ $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ sistem de puncte intermediare, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall\ i=\overline{1,n}$. Atunci suma Riemann asociată funcției *f*, diviziunii Δ și punctelor intermediare ξ este:

$$\sigma_\Delta(f, \xi) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots +$$
$$+ f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

• Dacă $\|\Delta_n\| \to 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^{(n)}) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Observații: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$;

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

Teoreme:

1) Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este mărginită şi are un număr finit de puncte de discontinuitate, atunci f integrabilă pe $[a, b]$ (Criteriul lui Lebesgue).

2) Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este, f continuă, atunci f integrabilă pe $[a, b]$.

3) Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, f monotonă, atunci f integrabilă pe $[a, b]$.

Proprietățile integralei definite:

1) Dacă f, g : $[a,b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile şi $k \in \mathbb{R}$, atunci

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\ ;$$

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx\ .$$

2) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $c \in [a, b]$, f integrabilă pe $[a, b]$ şi $[c, b]$. Atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(proprietatea de aditivitate la interval a integralei).

3) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f integrabilă pe $[a, b]$ şi $f(x) \ge 0$, $\forall\ x \in [a, b]$. Atunci $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ (pozitivitatea integralei).

4) Dacă f, g : $[a,b]\to\mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, b]$ şi $f(x) \le g(x)$, $\forall\ x \in [a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

(monotonia integralei).

Cuprins

ALGEBRĂ

GEOMETRIE

ANALIZĂ MATEMATICĂ